Nombres et calculs

Table des matières

Différentes sortes de nombres

Les entiers naturels

Un entier naturel permet de compter les éléments d'un ensemble.
On utilise les entiers naturels quand on dit par exemple
"j'ai 4 frères et sœurs"
"il y a 125 livres dans sa bibliothèque"
0 ; 1 ; 2; 158; 3875 ; 1854589663 sont des nombres entiers naturels.

Les nombres décimaux

Les nombres décimaux sont les nombres à virgule.
Mais uniquement ceux qui ne comportent pas une infinité de chiffres après la virgule.
Généralement on les utilise pour exprimer une mesure.
"Cette bouteille contient exactement 0,65 litres"
"Jojo mesure à peu près 1,72 mètres".
"Le soleil est à 149,6 millions de kilomètres de la terre et son âge est 4,603 milliards d'années"
Tout nombre décimal est en principe formé d'un nombre entier séparé d'une partie décimale par une virgule
Mais on peut considérer qu'un nombre entier est un nombre décimal dont la partie décimale est nulle..

4732,629
4732 est la partie entière (elle correspond à un nombre entier d'unités de mesure)
629 est la partie décimale (elle correspond à une fraction de l'unité de mesure)

En ce qui concerne le compteur représenté ci-dessus, il mesure en m^3 (l'unité de mesure) le volume de gaz consommé par une habitation. Ici 4732 m^3 auxquels on doit ajouter une fraction de m^3 égale à 629 millièmes.
Il faut voir 4732,629 comme la somme d'un nombre entier d'unités (4732) et d'une fraction d'unité (0,629).
L'écriture 0,xxx signale que le nombre 0,629 est plus petit que 1.
Donc 4732,629 = 4732 + 0,629 est un nombre qui se situe entre 4732 et 4733.

Les fractions

Une fraction s'écrit $\frac{a}{b}$ où **a est le numérateur** de la fraction
et **b le dénominateur** de la fraction.

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui représente le quotient exact de a par b

Rappelons que le quotient de 2 nombres entiers a et b est le résultat de la division de a par b.
On peut noter un quotient, a divisé par b, a : b , a / b sur les calculatrices ou $\frac{a}{b}$ en math (par exemple $4 : 5 = \frac{4}{5}$)

Une fraction peut servir à désigner…

1. Le nombre représentant le résultat de la division de son numérateur par son dénominateur $\frac{4}{5} = 4:5 = 0,8$.

On dit que $\frac{4}{5}$ est **l'écriture fractionnaire** de 0,8.

2. Le nombre de parts d'une chose partagée en parts égales : Les $\frac{4}{5}$ d'un gâteau.

Dans ce cas chaque part porte le nom de demi, tiers, quart, cinquième, …, dixième, …centième etc.

3. Et ces 2 sens se rejoignent si on considère que $\frac{4}{5}$ c'est 4 cinquièmes de 1 $\rightarrow \frac{1}{5} = 0,2 \rightarrow \frac{4}{5} = 4 \times 0,2 = 0,8$.

De même $\frac{3}{7}$ = 3 septièmes de 1. $\frac{8}{3}$ = 8 tiers de 1. $\frac{3}{100}$ = 3 centièmes de 1

Remarquons que par exemple $\frac{1}{3}$ = 0,3333…. n'est pas un nombre décimal (infinité de chiffres après la virgule) et que donc la fraction est le seul moyen d'écrire le résultat exact de cette division.
Mais à l'inverse tout nombre entier ou décimal peut être écrit sous forme d'une fraction. $5 = \frac{15}{3}$ et $18,26 = \frac{1826}{100}$.

Comprendre les fractions

Ce qu'on sait sur les fractions:

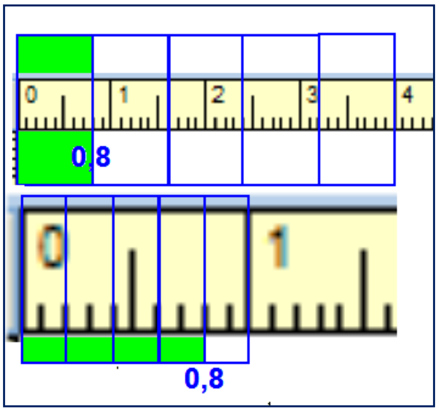
Dans $\frac{p}{n} \rightarrow \frac{\text{le nombre p est le numérateur de la fraction}}{\text{le nombre n est le dénominateur de la fraction}}$

On peut considérer $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{n}}$ comme…

- Le nombre qu'on obtient en divisant **p** par **n**.
- Le nombre **p** de parts d'une chose divisée en **n** parts égales
- Le nombre représentant **p** parts d'une division de **1** par **n.**

$\frac{3}{10}$

3 est le numérateur
10 est le dénominateur.
$\frac{3}{10}$= 3 divisé par 10 = 0,3
ou
$\frac{3}{10}$= 3 dixièmes de 1 = 0,3



Dans $\frac{4}{5}$, 4 est le numérateur, 5 est le dénominateur.

Si on considère $\frac{4}{5}$ comme le quotient de 4 par 5 , on fait la division de 4 par 5, on trouve 0,8 et on en déduit que $\frac{4}{5}$ = 0,8.

Si on considère $\frac{4}{5}$ comme les 4 cinquièmes de l'unité, on divise 1 en 5 parts égales, on trouve 0,2 pour chaque cinquième.
Donc 4 cinquièmes = 4 x 0, 2 = 0,8.
Cette dernière interprétation de la fraction nous sera utile quand nous étudierons les nombres décimaux car il faudra diviser l'unité en dixièmes, centièmes, millièmes pour constituer leur partie décimale.

Propriété 1.
Certaines fractions sont des décimaux d'autres ne sont pas des décimaux.

$\frac{10}{8}$ La division de 10 par 8 se termine: 10÷8 = 1,25. $\frac{10}{8}$ est un nombre de 3 chiffres donc un décimal.
$\frac{2}{3}$ La division de 2 par 3 ne se termine pas 2÷3 = 0,666…Une infinité de chiffres donc $\frac{2}{3}$ non décimal.

Propriété 2: Une fraction est plus petite que 1 si son dénominateur est plus grand que son numérateur.
Une fraction est plus grande que 1 si son dénominateur est plus petit que son dénominateur.

$\frac{10}{10}$=1 donc $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ….$\frac{9}{10}$ sont plus petites que 1 et $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{10}$, …. $\frac{58}{10}$, ..sont plus grandes que 1.

Propriété 3: Deux fractions peuvent être égales sans avoir le même écriture

Par exemple $\frac{20}{4} = 5$ et $\frac{15}{3} = 5$ et donc $\frac{20}{4} = \frac{15}{3}$.

Propriété 4: De 2 fractions qui ont même numérateur la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur
De 2 fractions qui ont même dénominateur la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur

$\frac{300}{100} = 3$ et $\frac{300}{10} = 30 \rightarrow$ plus le dénominateur est grand plus la fraction est petite.
$\frac{24}{3} = 8$ et $\frac{30}{3} = 10$ $\rightarrow$ Plus le numérateur est grand plus la fraction est grande.

Pour comparer 2 fractions qui n'ont ni le même dénominateur, ni le même numérateur, on effectue les divisions qu'elles représentent et on compare les quotients obtenus exacts ou approchés

Quel est la fraction la plus grande $\frac{3}{7}$ ou $\frac{4}{9}$? $\frac{3}{7} = 0,42..$ $\frac{4}{9} = 0,44 ...$ donc $\frac{4}{9}$ plus grande que $\frac{3}{7}$

Manipuler les fractions

Action	Départ	résultat	On constate que …	Loi
multiplier le numérateur par 5	$\frac{2}{6}$	$\frac{2x5}{6}=\frac{10}{6}$	résultat 5 fois plus grand que départ	$\frac{NxA}{D}=\frac{N}{D}xA$
Diviser le numérateur par 3	$\frac{6}{7}$	$\frac{6\div 3}{7}=\frac{2}{7}$	résultat 3 fois plus petit que départ	$\frac{N\div A}{D}=\frac{N}{D}\div A$
multiplier le dénominateur par 10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10x10}=\frac{1}{100}$	résultat 10 fois plus petit que départ	$\frac{N}{DxA}=\frac{N}{D}\div A$
diviser le dénominateur par 2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8\div 2}=\frac{1}{4}$	résultat 2 fois plus grand que départ	$\frac{N}{D\div A}=\frac{N}{D}xA$

REGLE Multiplier une fraction par un nombre.

6 x $\frac{4}{5}$ est le nombre obtenu en multipliant "4 cinquièmes de 1" par 6 autrement dit, on va obtenir

6 fois 4 cinquièmes de 1, ou 6 x 4 cinquièmes de 1 ou 24 cinquièmes de 1 et donc **$6 \times \frac{4}{5} = \frac{6 \times 4}{5} = \frac{24}{5}$**

Multiplier une fraction par un nombre revient à multiplier son numérateur par ce nombre.
Le dénominateur reste inchangé.
Autrement dit $c \times \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b}$ **Si c est plus grand que 1 la fraction est devenue c fois plus grande.**

Prendre une fraction ou un pourcentage d'une quantité

Une fraction de quantité est nommée de façon particulière. La fraction qui correspond à "la moitié" est le demi, puis on parle de "tiers" si le dénominateur est 3 ("deux tiers" = $\frac{2}{3}$) , de "quarts" si le dénominateur est 4 ("trois quarts" = $\frac{3}{4}$), de n^{ièmes} (huitièmes, dixièmes, centièmes, millièmes,….) pour les autres dénominateurs.

Les "pourcentages" (%) sont également des fractions dont le dénominateur est égal à 100. 30%=$\frac{30}{100}$.

Pour calculer une fraction d'une quantité, il suffit de multiplier la quantité par la fraction.

La TVA représente 20% du prix d'une voiture. Quel est son montant pour une voiture de 10.000€?

TVA = 10000 x $\frac{20}{100} = \frac{10000 \, x \, 20}{100} = \frac{200000}{100}$ = **2000 €**

Une bague pesant 20g contient 3 dixièmes de son poids en or quel poids d'or contient –elle?

Poids de l'or contenu dans la bague = 20 x $\frac{3}{10} = \frac{20 \, x \, 3}{10} = \frac{60}{10} =$ **6 g**

REGLE diviser une fraction par un nombre.

- Si on divise 1 cinquième par 6 on obtient 1 trentième. Donc $\frac{1}{5} \div 6 = \frac{1}{5x6} = \frac{1}{30}$.

$\frac{4}{5} \div 6$ est 4 fois plus grand que $\frac{1}{5} \div 6$ donc $\frac{4}{5} \div 6 = 4 \text{ x } \frac{1}{30} = \frac{4}{5x6}$.

Diviser une fraction par un nombre revient à multiplier son dénominateur par ce nombre
Le numérateur reste inchangé.
Autrement dit $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bxc}$ **Si c est plus grand que 1 la fraction est devenue c fois plus petite.**

Propriété 3. Un quotient ne change pas quand on multiplie ou on divise son numérateur et son dénominateur par un même chiffre. Autrement dit: $\frac{a}{b} = \frac{axc}{bxc} = \frac{a \div c}{b \div c}$

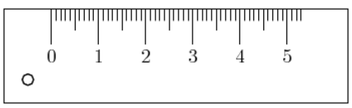
Cela permet de **simplifier des fractions**. Par exemple $\frac{12}{15} = \frac{3x4}{3x5} = \frac{4}{5}$

Multiplier une fraction par son dénominateur permet de supprimer ce dernier: $5 \times \frac{4}{5} = \frac{5x4}{5} = 4x\,\frac{5}{5} = 4 \text{ x } 1 = 4$

Dixièmes, centièmes, millièmes

Nous portons un intérêt particuliers aux fractions dont le dénominateur est 10, 100, 1000.
D'abord parce que notre système de numération repose sur elles du fait que c'est grâce à ces fractions qu'on explique et qu'on nomme la partie décimale d'un nombre.

Par exemple 54,2 = 54 +$\frac{2}{10}$ 54,23 = 54 + $\frac{23}{100}$ 54, 237 = 54 + $\frac{237}{1000}$ ou   54,007 = 54 + $\frac{7}{1000}$



Ensuite parce que notre système de mesure adopte souvent comme unités des multiples ou des sous multiples de 10 d'une unité de référence (mètre, gramme).
Conséquence 5 cm = $\frac{5}{100}$ m   1mm =$\frac{1}{10}$ cm = $\frac{1}{1000}$ m .

Comprendre les nombres décimaux

Tout nombre décimal peut s'écrire en deux parties séparées par une virgule :

4732,**629**

4732 est la **partie entière** (elle correspond à un nombre entier d'unités de mesure)

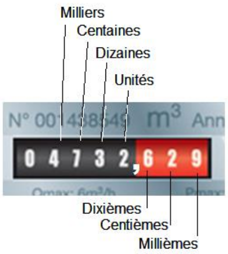
629 est la **partie décimale** (elle correspond à une fraction de l'unité de mesure)

Un entier peut être considéré comme un décimal à partie décimale nulle.

En ce qui concerne le compteur représenté ci-dessus, il mesure en m^3 (l'unité de mesure) le volume de gaz consommé par une habitation. Ici 4732 m^3 auxquels on doit ajouter une fraction de m^3 égale à 629 millièmes.

Il est important de constater que la partie décimale du nombre est plus petite que 1.
Qu'on peut l'écrire 0,629 et qu'on peut écrire le nombre 4732 + 0,629 .

Le poids des chiffres



La partie entière est décomposée en "paquets" de 1, 10, 100, 1000, etc…
Ce qu'il reste du nombre (moins d'une unité) constitue la partie décimale qui est décomposée en "morceaux" de un dixième, un centième, un millième,… qu'on appellera aussi "paquets" pour simplifier. La règle est qu'on a de 0 à 9 paquets de chaque sorte puisque lorsqu'on atteint 10 paquets d'une sorte, on peut former un paquet de capacité supérieure (par exemple avec 10 paquets d'une dizaine on fait une centaine, avec dix morceaux de un dixième on fait une unité…)
Les chiffres du nombre indiquent le nombre de paquets de chaque sorte.
Notre nombre est donc décomposé en 4 paquets de 1000, 7 paquets de 100, 3 paquets de 10, etc..
il est donc égal à $4\text{x}1000 + 7\text{x}100 + 3\text{x}10 + 2\text{x}1 + 6\text{x}\frac{1}{10} + 2\text{x}\frac{1}{100} + 9\text{x}\frac{1}{1000}$

On dit que 1000, 100, .., 1 millième sont **les poids** des chiffres correspondants. (exemple, le poids de 4 est 1000)

$$4\text{x}1000 + 7\text{x}100 + 3\text{x}10 + 2\text{x}1 + 6\text{x}\frac{1}{10} + 2\text{x}\frac{1}{100} + 9\text{x}\frac{1}{1000}$$

est la décomposition du nombre 4732,628 selon les puissances de 10.

C'est la décomposition qui explique le rôle de chaque chiffre dans l'écriture du nombre et qui permet de comprendre sa nature profonde, son utilité dans toutes sortes d'activités humaines, commerciales, scientifiques, médicales, etc.

Plusieurs façons de décomposer un nombre décimal.

Soit un nombre décimal tel que **853,28**.
On a vu que classiquement on pouvait le décomposer un nombre selon les puissances de 10 mais on peut le décomposer, selon nos besoins de bien d'autres manières.
On peut découper son écriture 85328 en tranches arbitraires. Chaque tranche forme un nombre entier, ce nombre est un nombre de paquets dont le poids est celui du dernier chiffre de la tranche. Le nombre décimal est égal à l'addition des paquets ainsi formés.

8	**5**	**3,**	**2**	**8**	**Le nombre 853,28 peut être arbitrairement décomposé en …**
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
8	5	3	2	8	**8** paquets de 100 et **5328** paquets de un centième soit $800 + \frac{5328}{100}$
8	5	3	2	8	**853** paquets de 1 et **28** paquets de un centième, soit $853 + \frac{28}{100}$
8	5	3	2	8	**85** paquets de 10, **32** paquets de un dixième et **8** paquets de un centième soit $850 + \frac{32}{10} + \frac{8}{100}$
8	5	3	2	8	**85328** paquets de un centième soit $\frac{85328}{100}$. C'est l'écriture fractionnaire du nombre décimal.

Lire , nommer et écrire les nombres décimaux

Nommer et écrire les nombres décimaux

Millions			Mille			Unités					
		5	9	0	5	8	6	3,	1	8	

Pour nommer un nombre, il faut décomposer sa partie entière et sa partie décimale en paquets de mille, 1 million, 1 milliard , etc … ce qui revient à diviser sa partie entière en tranches de 3 chiffres à partir de la virgule.

Le nombre **5905863,18** peut être décomposé en **5.905.863,18**

5 paquets de 1 million,

905 paquets de mille,

863 unités

+ une partie décimale égale à **18 centièmes**.

Il est donc normal **qu'on nomme et qu'on écrive notre nombre**:

"cinq millions, neuf cent cinq mille, huit cent soixante trois et dix-huit centièmes".

Seul le nom de la tranche "unités" n'est pas mentionné
et la partie décimale est lue comme la fraction à laquelle elle est égale: 0,18 = $\frac{18}{100}$ ce qu'on lit dix-huit centièmes.

Donc en négligeant les zéros qui la terminent, on lira la partie décimale en "dixièmes" si elle comporte un chiffre, en "centièmes" si elle comporte 2 chiffres, en "millièmes" si elle comporte 3 chiffres, ou en "dix –millièmes" etc.

Remarques orthographiques :

On dit "mille " et non "1 mille".
Mille invariable au pluriel.
vingt et cent ne prennent un s au pluriel que s'ils sont situés à la fin du nombre.

Problème: Lire le nombre 25946,007 et le décomposer suivant les puissances de 10

Millions			Mille			Unités					
				2	5	9	4	6,	0	0	7

Je lis: 25 mille 946 et 7 millièmes
Je décompose: **2**x10000 +**5**x1000 +**9**x100+**4**x10+**6** + **7**$\frac{1}{1000}$

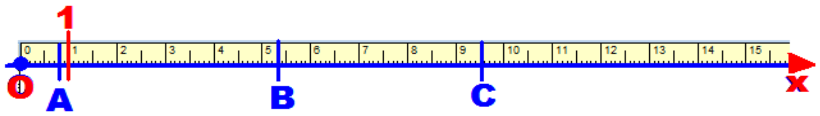
Les zéros utiles et inutiles :

Les zéros situés à gauche de la partie entière ou à droite de la partie décimale ne servent à rien.
On peut les supprimer ou les garder mais le nombre est plus simple si on les supprime: ~~00~~4732,629~~00~~

Un nombre plus petit que 1 a obligatoirement une partie entière égale à 0. Par exemple dans 0,079 le premier 0 est obligatoire sinon le nombre n'a pas de partie entière et le second 0 est utile parce qu'il nous dit que dans la décomposition du nombre en paquets, on ne trouve aucun paquet de un dixième.

L'ordre des nombres décimaux

La droite graduée. Lorsque sur une droite on choisit un point O appelé origine, un sens positif (de O vers x) et un point situé sur Ox tel que la distance de ce point à O représente conventionnellement l'unité de distance (le 1), on obtient ce qu'on appelle un **axe**.



À partir du 1, on peut doter la droite d'une graduation situant le 2 , le 3, etc… puis découper chaque intervalle en dixièmes, chaque dixième en centièmes, etc..

De telle sorte qu'à chaque point de la demi droite Ox corresponde un nombre.
Ce nombre est appelé **l'abscisse du point**. Le point s'appelle **l'image** du nombre.
Sur notre axe gradué au dixième, l'abscisse de A est 0,8, l'abscisse de B est 5,3, l'image de 9,5 est C.

Valeur approchée.

La précision d'une mesure dépend de l'outil qu'on utilise pour mesurer.
Par exemple supposons qu'on mesure une longueur L égale à **25,238 cm** avec une règle graduée en cm on va trouver que notre longueur mesure entre 25cm et 26cm.
25 et 26 sont **des valeurs approchées** de la longueur **par défaut** (25) et **par excès** (26) **à l'unité prés** (car la différence entre la longueur réelle et les valeurs approchées est inférieure à 1). On écrit **L ≈ 25** ce qui signifie que la valeur de L est voisine de 25.
Si maintenant on utilise une règle graduée en mm on va trouver que notre longueur mesure entre 25,2 cm et 25,3 cm (valeurs approchées par défaut et par excès **au dixième près** car le chiffre de poids le plus faible dont on est sûr est celui des dixièmes). **L ≈ 25,2** ou **L ≈ 25,3.**

Comparaison de décimaux:

2 nombres peuvent être différents (**2,8 ≠ 5**) ou égaux (**abscisse de A = 0,8**).
De 2 nombres, le plus grand est celui dont l'image est la plus à droite sur un axe gradué.
"**8 plus grand que 5**" autrement dit "8 supérieur à 5" s'écrit désormais " **8 > 5** "
"**2,8 plus petit que 2,9**" autrement dit "2,8 inférieur à 2,9" s'écrit désormais " **2,8 < 2,9** "
Ranger de la plus petite à la plus grande les abscisses de A, B, C sur l'axe gradué **:** **0,8 < 5,3 < 9,5**

Méthode de comparaison de 2 nombres décimaux:

- Si les 2 nombres ont des parties entières différentes, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.
- Si les 2 nombres ont même partie entière le plus grand est celui qui a la plus grande partie décimale.

On sait comparer les parties entières.
Pour comparer 2 parties décimales, on compare leurs chiffres rang par rang de la virgule vers la droite jusqu'au premier rang dont les chiffres sont différents.
À ce rang, le plus grand des 2 chiffres désigne la plus grande partie décimale.

→ → →

0,	1	2	8	**5**	6		0,	0	9	5		**0,**	**9**	**8**	**7**	7	
0,	**1**	**2**	**8**	**7**	**9**		**0,**	**1**				0,	9	8	6	9	8

En jaune le 1er rang où les chiffres sont différents en balayant les parties décimales de gauche à droite. En rouge la plus grande partie décimale.

Encadrer un nombre: C'est trouver un nombre plus petit que lui et un nombre plus grand que lui.
Ce qu'on peut écrire sous la forme suivante: **2,5 < 2,8 < 3,5**. (2,5 et 3,5 encadrent 2,8).
2,5 et 3,5 sont les bornes de l'encadrement, la distance entre 3,5 et 2,5 est l'amplitude de l'encadrement (l'amplitude est 3,5 – 2,5 = 1)
Encadrer 8,35 par 2 entiers consécutifs : 8 < 8,35 < 9.

Intercaler un nombre entre deux nombres différents.

On peut toujours intercaler un nombre décimal entre 2 nombres décimaux mêmes s'ils paraissent "se toucher"
Pour obtenir le nombre intercalé il suffit d'ajouter au plus petit nombre un chiffre de poids plus faible que le plus faible de tous les poids. Trouver un nombre encadré par 25,234 et 25,235 (ou intercalé entre ces 2 nombres):

2	**5,**	**2**	**3**	**4**		plus petit nombre
2	5,	2	3	4	1	nombre intercalé (on aurait pu prendre un autre chiffre que 1 ou le situer à un poids plus faible)
2	**5,**	**2**	**3**	**5**		plus grand nombre

Techniques de calcul sur les nombres décimaux

Addition   25,6 + 190,47 = 216,07

Vocabulaire

25,6 et 190,57 sont **les termes** de l'addition.
216,17 est **le résultat** ou **la somme** des 2 nombres.

Technique opératoire

	1		1		
		2	5,	6	
+	1	9	0,	4	7
	2	1	6,	0	7

Soustraction   497 – 286,9 = 210,1

Vocabulaire

497 et 286,9 sont **les termes** de la soustraction.
210,1 est **le résultat** ou **la différence** des 2 nombres.

Technique opératoire

		4	9	7,	$_{1}0$
	–	2	8	6_{+1},	9
		2	1	0,	1

Pour l'addition comme pour la soustraction, l'important est de <u>mettre les chiffres des unités exactement l'un sous l'autre</u>. Pour l'addition on met le 0 sous le 5. Pour la soustraction on met le 6 sous le 7.
Dans le résultat la virgule sera sous la virgule des nombres additionnés ou soustraits.

Multiplication   349 x 24,5 = 8550, 5

Vocabulaire

349 et 24,5 sont **les facteurs** de la multiplication.
8550,5 est **le résultat** ou **le produit** des 2 nombres.

Technique opératoire

		3	4	9	
	X		2	4,	5
	1	2	1		
		1	$^{1}7$	$^{2}4$	$^{4}5$
+	1	$^{1}3$	$^{1}9$	$^{3}6$	
+	6	9	$^{1}8$		
	8	5	5	0,	5

Pour la multiplication, on multiplie le premier facteur par chacun des chiffres du 2eme facteur (en commençant par le dernier) sans tenir compte des virgules.
Mais on décale chaque résultat partiel d'un chiffre vers la gauche par rapport au précédent.
Puis une fois effectuée la somme de ces produits, (on trouve 85505) on fait la somme des chiffres après la virgule de chaque facteur (ici 0 pour 249 + 1 pour 24,5) et on fait en sorte que le résultat ait ce nombre de chiffres après la virgule (ici 1 donc 85505 → 8550,5).

Division euclidienne   674:23 = 29, reste 7

Vocabulaire

674 est **le dividende**,
23 est **le diviseur**
29 est **le quotient**
7 est **le reste**
Les 4 nombres sont liés par **674 =29x23 + 7**
Le reste (7) doit être inférieur au diviseur (23).

Technique opératoire

	6	7	4	2	3
–	4	6		2	9
	2	1	$_{1}4$		
–	2	0_{+1}	$^{2}7$		
	0	0	7		

Un reste partiel (21) doit être inférieur au diviseur (23)

Si on divise 674,25 par 23 on commencera par faire la division euclidienne de 674 par 23 et une fois le dernier reste (7) trouvé, on mettra une virgule après le quotient 29, … avant de descendre le 2 de la partie décimale derrière le reste 7 et de continuer la division.

Si on divise 674,25 par 23,8 on commencera par multiplier <u>dividende **et** diviseur</u> par 10 (ou 100 ou 1000) afin que le diviseur n'ait plus de virgule, puis on se ramènera au cas précédent en faisant la division de 6742,5 par 238.

Le quotient d'une division est exact sous la forme d'un nombre entier ou d'un nombre décimal quand il n'y a plus de chiffre à descendre au dividende et qu'on trouve un reste nul.
Lorsqu'il n'y a plus de chiffre à descendre au dividende, si au cours des divisions successives on retrouve 2 restes identiques, c'est que la division ne s'arrêtera jamais et que la partie décimale du quotient reproduira à l'infini la même séquence de chiffres. Par exemple le quotient sera **29,3245245245…** les points de suspension suggérant que la série des 245 continue.

Critères de divisibilité d'un nombre entier

Divisible par		
2	si le nombre est pair (son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8)	12 ou 58
3	si la somme de ses chiffres est un multiple de 3	462 (4+6+2 =12 = 4x3)
4	si le nombre composé de ses 2 derniers chiffres est un multiple de 4	524 (24 = 4x6)
5	si son dernier chiffre est 0 ou 5	120 ou 85
6	s'il est divisible à la fois par 2 et par 3	144 (1+4+4= 9 =3x3 et 4)
9	si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 9	477 (4+7+7 = 18=2x9)
10	si son dernier chiffre est 0	1250
11	Si la somme des chiffres de rang impair moins la somme des chiffres de rang pair est 0 ou un multiple de 11.	154 → (1+4)-5 =0 1353→(1+5)-(3+3)=0

Multiplication et division par 10, 100, 1000

● Les nombres écrits avec un 1 suivi d'un certain nombre de 0, (…, 1000, 100, 10, 1) qui caractérisent le poids des chiffres de la partie entière d'un nombre, s'appellent **des puissance de 10**.

● Pour **multiplier un nombre décimal par une puissance de 10** on déplace sa virgule <u>vers la droite</u> d'autant de rangs que la puissance de 10 comporte de zéros. Si on dépasse la fin de l'écriture du nombre, <u>on ajoute autant de zéros de plus à droite du nombre</u> que de rangs manquants, avant de déplacer la virgule.
Si le nombre se termine par "**,0** " la virgule et le zéro qui la suit deviennent inutiles. On les supprime.

5,246 x 10 = 52,46	5,246x100 =524,6	5,246x1000=5246 (,0)	5,246x10000=52460 (,0)

● Pour **diviser un nombre décimal par une puissance de 10** on déplace sa virgule <u>vers la gauche</u> d'autant de rangs que la puissance de 10 comporte de zéros. Si on dépasse le début de l'écriture du nombre, <u>on ajoute autant de zéros de plus à gauche du nombre</u> que de rangs manquants, avant de déplacer la virgule.
Ici, le 0 juste avant la virgule est obligatoire (0,0542) mais pas les 0 qui le précèdent ~~0~~0,0542)

52,46 : 10 = 5,246	52,46:100 =0,5246	52,46:1000 = 0,05246	52,46:10000=0,005246

● **Multiplier un nombre par un facteur 0,1 ou 0,01 ou 0,001** revient à le diviser par une puissance de 10 comportant autant de zéros que le facteur a de chiffres après la virgule .
x 0,**1** revient à diviser par 1**0**, x0,**01** revient à diviser par 1**00** (2 chiffres après la virgule , 2 zéros) etc ..

52,46x0,1 = 5,246	11x0,001 = 0,011	128,957x0,01=1,28957	180x0,1=18

<u>Opérations équivalentes</u>

Multiplier par 10	Diviser par 0,1	Diviser par $\frac{1}{10}$
Multiplier par 100	Diviser par 0,01	Diviser par $\frac{1}{100}$
Multiplier par 1000	Diviser par 0,001	Diviser par $\frac{1}{1000}$
Diviser par 10	Multiplier par 0,1	Multiplier par $\frac{1}{10}$
Diviser par 100	Multiplier par 0,01	Multiplier par $\frac{1}{100}$
Diviser par 1000	Multiplier par 0,001	Multiplier par $\frac{1}{1000}$

Utilisation des techniques de calcul

<u>À chaque situation d'un problème son opération</u>

addition	Ajouter des quantités <u>de même nature</u>. (des prix en euros, des longueurs en cm, des aires en m^2, des groupes de personnes, des temps en heures, minutes, secondes, …)
soustraction	Pour trouver le trou d'une addition dont on connaît le total et la valeur de certains termes mais pas de tous. (j'avais tant, il me reste tant, combien ai – je dépensé? Ou j'avais tant, j'ai dépensé tant, combien il me reste?)
multiplication	Pour évaluer le total d'une quantité faite de parts égales connaissant le nombre de parts et le montant de chaque part. (Prix de 3 articles identiques, nombre de cases d'un quadrillage rectangulaire comportant 3 cases en largeur et 4 en longueur)
division euclidienne	Pour calculer Soit <u>le nombre de parts égales</u> au diviseur qu'on peut faire avec une quantité (le dividende). Soit <u>la valeur des parts</u> qu'on peut faire en partageant une quantité (le dividende) en un nombre de parts égales (le diviseur). Le quotient nous indique soit le nombre de parts entières, soit la valeur des parts entières et le reste ce qui est insuffisant pour constituer une part de plus une fois le partage équitable terminé.
Ordre de grandeur	Pour vérifier mentalement que le résultat d'une opération est vraisemblable, on remplace les nombres par des nombres ronds et on calcule de tête une valeur approchée du résultat.

Conversions d'unités de mesures

Kilomètre Km	hectomètre hm	décamètre dam	**mètre m**	décimètre dm	centimètre cm	millimètre mm
1000	**100**	**10**	**1**	**0,1**	**0,01**	**0,001**
kilogramme kg	hectogramme hg	décagramme dag	**gramme g**	décigramme dg	centigramme cg	milligramme mg

L'unité de référence étant le mètre ou le gramme, les nombres qui figurent dans cette grille indiquent combien chaque unité de mesure compte d'unités de référence.
Par exemple 1 hectomètre équivaut 100 mètres et 1 centigramme équivaut à 0,01 grammes.

On utilise aussi la tonne 1t = 1000 kg ou 1000000g et le quintal 1q = 100kg ou 100000g.

Pour convertir une mesure faite dans l'unité **a** en la même mesure faite dans l'unité **b**, il faut se demander combien il faut d'unités **b** pour faire une unité **a** puis on multiplie notre mesure par ce nombre.

Pour trouver combien d'unités b il faut pour faire une unité a.

Kilomètre Km	hectomètre hm	décamètre dam	mètre m	décimètre dm	centimètre cm	millimètre mm
		1	**0**	**0**	**1 dam = 100 dm**	
0,	**0**	**1**			**1 dam = 0,01 km**	

On met un 1 dans la case de l'unité **a (ici le dam)** et on relie la case de l'unité **b** avec des zéros.
Si on rajoute les zéros à la gauche du 1, on met une virgule après le 0 le plus à gauche.
Le nombre obtenu est le nombre cherché.

128,52 hectogrammes = combien de grammes?
Il faut 100g pour faire 1hg donc 128,52hg = 128,52x100=12852g.
11 mètres = combien de kilomètres?
Il faut 0,001 kilomètres pour faire 1 mètre donc 11 m = 11x0,001 km = 0,011 km.

Un autre moyen peut être plus simple.

Kilomètre Km	hectomètre hm	décamètre dam	mètre m	décimètre dm	centimètre cm	millimètre mm
		1	**2**	**8,**	**5**	**3**
		1,	**2**	**8**	**5**	**3**

On veut convertir 128,53 **décimètres** en **décamètres**.
On écrit 128,53 dans la grille (un chiffre par case) en faisant bien attention que le chiffre des unités (8) et la virgule figurent dans la case des **décimètres**.
Ensuite on déplace la virgule dans la case des **décamètres** et le chiffre qu'on lit est la conversion de 128,53 décimètres en décamètres. 128,53dm = 1,2853 dam

On procède identiquement pour convertir 1,2Kg en g.

kilogramme kg	hectogramme hg	décagramme dag	gramme g	décigramme dg	centigramme cg	milligramme mg
1,	**2**					
1	**2**	**0**	**0,**			

Mais là pour déplacer la virgule jusqu'à la case des grammes on est obligé d'ajouter 2 zéros et la virgule ne sert plus à rien en l'absence de partie décimale.

Il arrive qu'on soit obligé d'ajouter des zéros à la gauche du nombre.
Par exemple pour convertir 1,23g en hectogrammes . Exemple ci –dessous.

kilogramme kg	hectogramme hg	décagramme dag	gramme g	décigramme dg	centigramme cg	milligramme mg
			1,	**2**	**3**	
	0,	**0**	**1**	**2**	**3**	

Calculer avec les durées

On a **1 année (non bissextile) = 365 jours,**
1 jour = 24h,
1h = 60 min,
1min = 60 s,
1h =3600s

• Si la durée est exprimée par un nombre décimal à convertir en h, min, s

par exemple **convertir 3,63 heures en h,min,s**

D'après la définition des nombres décimaux, la durée est 3 heures + 6 dixièmes d'heure + 3 centièmes d'heure.
On calcule le dixième d'heure en minutes **0,1h** = 60 ÷ 10 **= 6 min** ,
le centième d'heure en secondes **0,01h** = 3600 ÷100 **= 36s**.
Et on en déduit que 3,63h = 3h + 6x6 min + 3x36s = 3h 36min 108s
Mais comme 108 dépasse 60, on convertit 108s en min et on trouve 108÷60 = 1 reste 48
d'où 108 secondes = 1 min 48s qu'on ajoute à 3h 36min pour trouver 3,63h = 3h 37min 48s .

• Si on doit additionner ou soustraire les durées, diviser ou multiplier les durées par un nombre

On opère sur chaque type d'unité par exemple
on ajoute (ou soustrait) les minutes entre elles, les heures entre elles,
on multiplie (ou divise) les heures par le nombre et on fait de même pour les minutes, etc ..
Ensuite, on convertit les résultats en h, min, s et on les ajoute selon les règles établies.

Par exemple 14h 25min 48 s divisé par 4
= 3,5h +6,25min +12s (14:4=3,5 et 25:4 = 6,25 et 48:4 = 12)
Ensuite on convertit chaque durée décimale en h,m,s. 3,5h = 3h30 min , 6,25 min = 6min15s et on ajoute les chiffres obtenus . On trouve que (14h 25min 48s) ÷ 4 = 3h 36min 27s.

Par exemple 2h 25 min 20s + 8h 53 min + 45s
= 10h 78 min 65s → Les minutes et les secondes débordent le maximum de 60 autorisé.
On commence la conversion par l'unité la plus petite, ici les secondes. ..
On convertit 65s en 1 minute + 5s → 10h 78 min 65 s = 10h 79 min + 5s
On convertit 79 min en 1h + 19 min → 10h 79 min + 5s = **11h 19 min 5 s** c'est le résultat cherché .

• Si on doit soustraire un nombre d'unités à un nombre insuffisant d'unités du même type.

Par exemple 13h20min -11h56min
pour calculer la durée séparant les deux dates, on ne peut soustraire 56 à 20, alors on prélève une heure à 13h (qui devient 12h) et on la transforme en 60 minutes les minutes devenant 80.
Notre opération devient 12h80min – 11h56min et là on peut opérer. Le résultat est **1h 24min**.