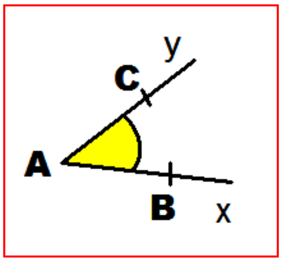
Géométrie
Figures du plan

Table des matières

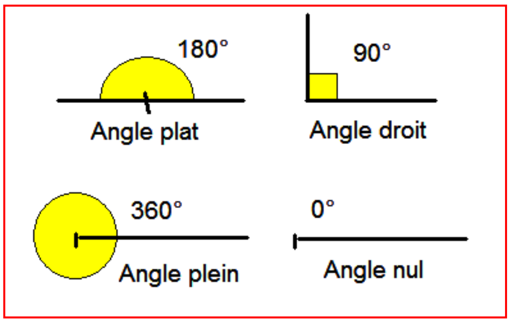
Angles

L'angle désigne le secteur délimité par 2 demi-droites. On s'intéresse plus particulièrement à son "ouverture".



Définition: **Un angle** est formé par 2 demi-droites de même origine .
L'origine est **le sommet** de l'angle et les demi-droites sont **ses côtés**.
L'angle peut être noté soit $x\widehat{A}y$ si [Ax) et [Ay) sont ses côtés et A son sommet.
soit $B\widehat{A}C$ si les points B et C sont situés chacun sur un côté.
Le sommet est toujours la lettre du milieu.
L'angle est codé par un arc de cercle centré sur le sommet et reliant les côtés.
Sauf l'angle droit codé par un carré dont un coin épouse l'angle.

Mesure d'un angle

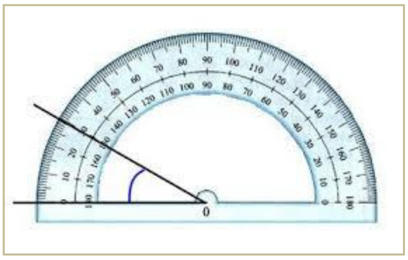


Définitions:

- 2 Angles sont dits "**égaux**" quand ils sont superposables.
- Soit une droite (xy), prenons un point A sur la droite.
  $x\widehat{A}y$ est un **angle plat**.
- **Le degré** est la mesure de l'angle obtenu en divisant un angle plat en 180 angles égaux.

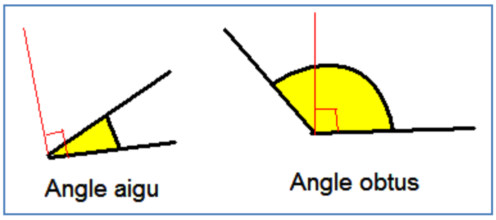
Par comparaison à cet angle, tout angle peut être mesuré en degrés.
L'angle droit est la moitié d'un angle plat. Sa mesure est 90°.
Quand les côtés de l'angle sont confondus, ils délimitent soit un **angle nul** (0°) soit un **angle plein** (360°) selon qu'on considère le secteur interne ou externe aux demi-droites.

Le rapporteur



C'est l'outil qui permet de mesurer un angle ou de tracer un angle dont on connaît la mesure.
Comme sur la figure, le sommet de l'angle doit coïncider avec le centre O du rapporteur et l'une des ses demi-droites doit coïncider avec une graduation 0.
Selon qu'il est à droite ou à gauche ce zéro nous indique qu'il faut lire la mesure de l'angle sur la graduation du repère intérieur ou sur celle du repère extérieur.
Une demi-droite de l'angle coïncide donc avec l'origine d'un repère et l'autre coïncide avec une graduation de ce repère qui donne la mesure de l'angle.

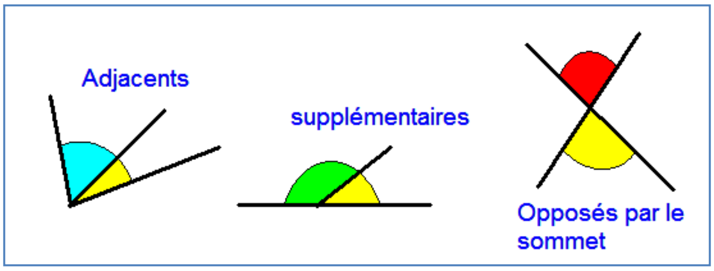
Comparaison avec l'angle droit



Un angle plus petit que l'angle droit, c'est-à-dire mesurant moins de 90° est un **angle aigu**.

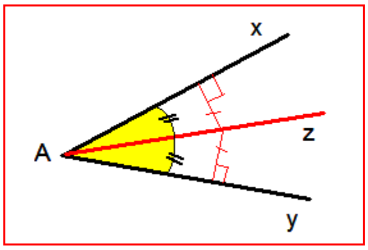
Un angle plus grand que l'angle droit, c'est-à-dire mesurant plus de 90° est un **angle obtus**.

Configurations particulières d'angles



2 Angles **adjacents** ont un sommet commun et un côté commun.
2 angles adjacents dont la somme forme un angle plat sont dits "**supplémentaires**".
Les angles formés par 2 droites, ayant un sommet commun mais aucun côté commun sont dits **opposés par le sommet**. Ces angles sont égaux.

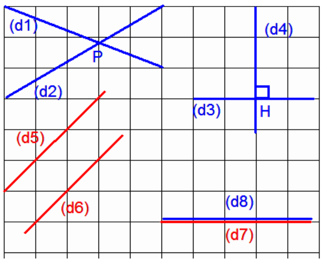
Bissectrice d'un angle.



La demi – droite [Az) qui partage l'angle $x\widehat{A}y$ en deux angles adjacents égaux est appelée "**bissectrice** de l'angle".
Si on plie la figure selon la bissectrice, ses deux côtés se superposent exactement. On dit que la bissectrice est "l'axe de symétrie" de l'angle.
De cette propriété on déduit que a bissectrice est aussi le lieu des points qui sont à égale distance des côtés de l'angle.

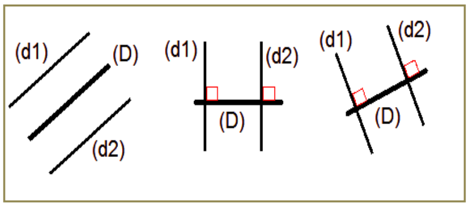
Figures planes

Positions relatives de 2 droites



- Si 2 droites se coupent en un point P unique comme (d1) et (d2) on dit qu'elles sont **sécantes**. "P appartient à (d1)" s'écrit P $\in$ (d1).
- Si 2 droites sécantes forment un angle droit comme (d3) et (d4) on dit qu'elles sont **perpendiculaires**. Notation : (d3) $\perp$ (d4)
- Si 2 droites ne se coupent pas comme (d5) et (d6) on dit qu'elles sont **parallèles**. Notation (d5) // (d6)
- Enfin (d8) et d(7) forment une même droite. Elles sont **confondues**.

Pour démontrer que 2 droites sont parallèles ou perpendiculaires



- Si (d1) // (D) et (d2) // (D) alors (d1) // (d2)

2 droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

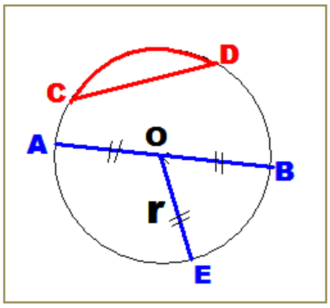
- si (d1)$\perp$ (D) et (d2)$\perp$ (D) alors (d1) // (d2)

2 droites perpendiculaires à une 3^{e} droite sont parallèles entre elles.

- Si (d1) // (d2) et (d1) $\perp$ (D) alors (d2) $\perp$ (D)

Toute perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Cercle et disque



Le cercle de centre O et de rayon r est le lieu des points situés à une distance r de O.

Si on appelle $(\mathcal{C})$ ce cercle on a A $\in(\mathcal{C})$, B $\in(\mathcal{C})$, C $\in(\mathcal{C})$ etc ..

Ce qui nous permet d'affirmer que OA = OE = OB = OC = OD = r

Le disque de centre O et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance à O est au plus égale à r. C'est l'intérieur du cercle: Le disque est une surface alors que le cercle est une ligne.

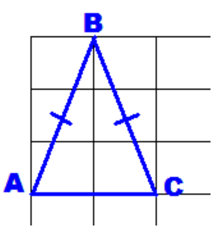
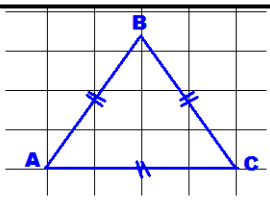
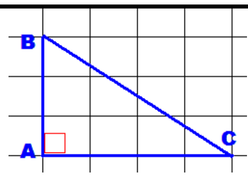
Le segment [CD] est une **corde**. La corde intercepte un **arc de cercle** (la portion de cercle en rouge).

Le segment [AB] est une corde qui passe par le centre c'est un **diamètre** AB = 2xr.

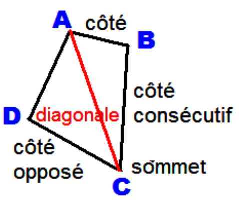
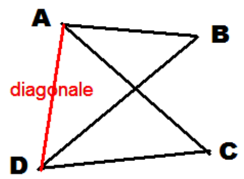
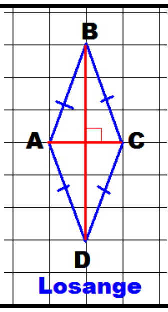
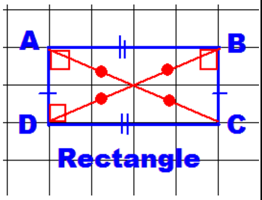
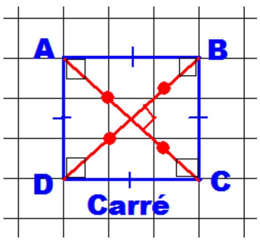
Le diamètre est la plus grande de toutes les cordes. Il intercepte un demi cercle.

POLYGONES

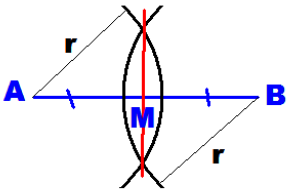
Triangles

 BA = BC donc le triangle ABC est **isocèle**. B est le sommet principal. [AC] est la base.	 AB=AC=BC donc le triangle ABC est **équilatéral**.	 [AB] $\perp$ [AC] donc le triangle ABC est un triangle rectangle en A. Le côté [BC] opposé à l'angle $\widehat{A}$ est l'hypoténuse (le plus long côté)

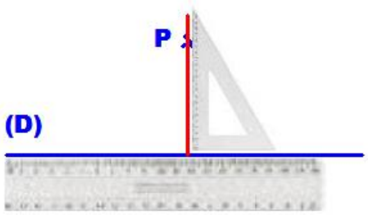
Quadrilatères

 **ABCD quadrilatère non croisé**	 **ABDC quadrilatère croisé**			
Un quadrilatère a 4 côtés, 4 sommets, 4 angles, 2 diagonales. Quand on construit un quadrilatère, il faut joindre les sommets dans l'ordre où on les nomme. Selon la disposition des points on obtient un quadrilatère croisé ou non croisé.		Un quadrilatère non croisé dont les 4 côtés sont égaux est un losange. Ses diagonales se coupent en angle droit.	Un quadrilatère non croisé qui a 4 angles droits (3 suffisent) est un rectangle. Ses diagonales sont d'égale longueur.	Un quadrilatère non croisé qui a 4 angles droits et 4 côtés égaux est un carré. C'est à la fois un rectangle et un losange.

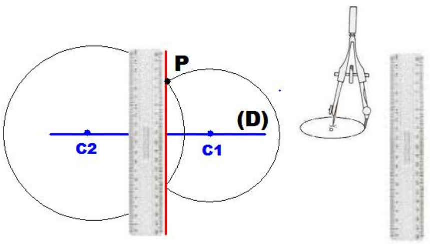
Savoir tracer



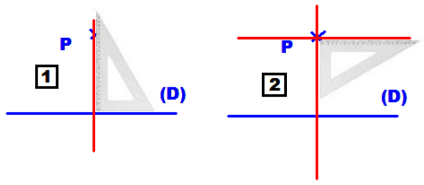
Construire le milieu M d'un segment AB.
Avec la règle et le compas.
On choisit un rayon r plus grand que la moitié de AB et on trace les cercles de centre A et B et de rayon r.
Ces cercles se coupent en 2 points.
La droite qui joint ces 2 points coupe [AB] en son milieu M et de plus elle est perpendiculaire à [AB]



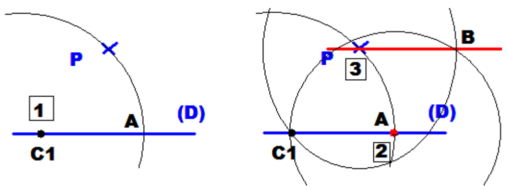
Tracer une perpendiculaire à la droite (D) passant par le point P.
Avec la règle et l'équerre.
On met la règle le long de (D).
On fait glisser un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que l'autre passe par P.
On trace la perpendiculaire à (D) passant par P le long du côté de l'angle droit de l'équerre qui est perpendiculaire à (D).



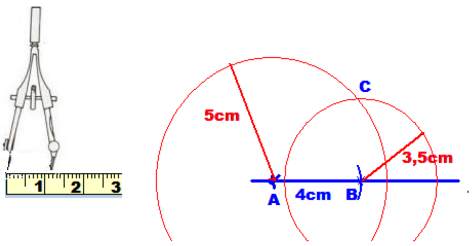
Tracer une perpendiculaire à la droite (D) passant par le point P.
Avec la règle et le compas.
On pique le compas en un point arbitraire C1 de (D).
On trace le cercle de centre C1 passant par P.
On pique le compas en un point arbitraire C2 de (D) différent de C1.
On trace le cercle de centre C2 passant par P.
On trace la droite qui joint les points d'intersection des 2 cercles, elle est perpendiculaire à (D) et elle passe par P.



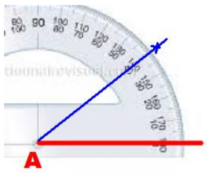
Tracer une parallèle à la droite (D) passant par le point P.
Avec la règle et l'équerre.
On trace comme on vient de le faire une perpendiculaire à (D) passant par P.
Avec l'équerre on trace une perpendiculaire à la droite qu'on vient de tracer passant par P.
La dernière droite tracée et la droite (D) sont perpendiculaires à une même droite donc elles sont //.



Tracer une parallèle à la droite (D) passant par le point P.
Avec la règle et le compas.
On choisit un point arbitraire C1 sur (D) et on trace le cercle de centre C1 passant par P. Il coupe (D) en A.
<u>On garde le même écartement de compas</u>, le même rayon et on trace les cercles de centres A et P. Ils se coupent en B.
Le quadrilatère C1, P, B, A a les 4 côtés égaux donc c'est un losange et la droite (PB) est parallèle à la droite (D). C'est la droite cherchée.

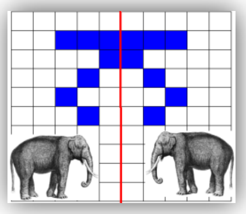


Construire un triangle ABC tel que AB=4cm, AC=5cm, BC=3,5cm.
Le compas permet de choisir la longueur d'un rayon quand on règle l'écartement de ses pointes avec une règle graduée.
On trace une droite et on choisit un point A arbitraire.
Le cercle de centre A et de rayon 4cm coupe cette droite en B.
On a bien AB = 4cm.
On trace le cercle de centre A et de rayon 5cm et le cercle de centre B et de rayon 3,5cm. Les 2 cercles se coupent en 2 points. On appelle l'un d'eux C. On a bien AC = 5cm et BC =3,5cm.
Donc les points ABC sont bien les sommets d'un triangle respectant les conditions de l'énoncé.



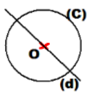
Construire un angle de 40°.
Tracer une demi-droite (en rouge) et situer le sommet A de l'angle à son origine. Faire coïncider le centre du rapporteur avec le point A et la demi- droite avec le zéro d'un de ses repères. Marquer d'une croix le point situé en face de la graduation 40 de ce repère. Tracer le 2^{e} côté de l'angle de 40° en joignant le sommet à ce point (en bleu).

Symétrie axiale



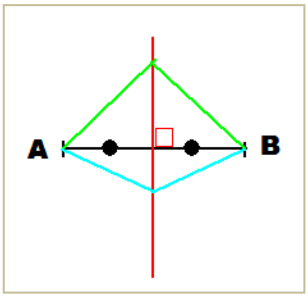
On dit qu'une figure admet un axe de symétrie si en la pliant le long d'une droite les 2 parties de la figure se superposent.

Par exemple, si on plie la figure ci contre selon la ligne rouge qui la partage en 2, sa partie de droite va se superposer à sa partie de gauche. Donc cette figure admet un axe de symétrie: il s'agit de la ligne rouge.

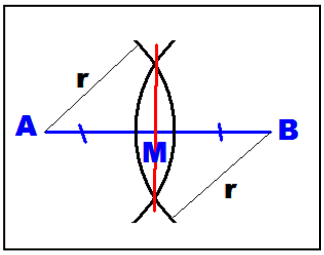


Certaines figures admettent plusieurs axes de symétrie. Le cercle en admet une infinité.
Toute droite passant par son centre (tout diamètre) est un axe de symétrie du cercle.

Médiatrice d'un segment

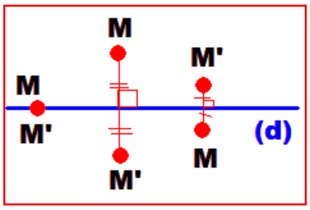


Le segment [AB] admet comme axe de symétrie la droite rouge, perpendiculaire à (AB) et passant par son milieu.
Cette droite s'appelle "**la médiatrice**" du segment.
Elle partage le plan en 2 régions, à gauche les points qui sont plus proches de A que de B, à droite les points qui sont plus proches de B que de A.
Définition: La médiatrice est le lieu des points équidistants de A et de B.
Réciproquement, si un point P du plan vérifie l'égalité PA = PB, ce point est sur la médiatrice de [AB].

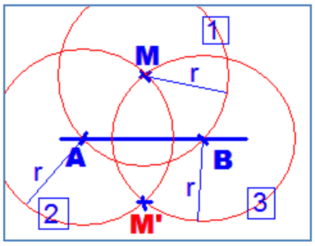


Construire la médiatrice d'un segment AB.
Avec la règle et le compas.
On choisit un rayon r plus grand que la moitié de AB et on trace les cercles de centre A et de centre B et de rayon r.
Ces cercles se coupent en 2 points. Ces 2 points sont a égale distance r de A et de B.
Ils sont donc sur la médiatrice de [AB], et comme par 2 points il ne passe qu'une seule droite, on la trace. C'est la médiatrice de [AB].

Symétrie axiale

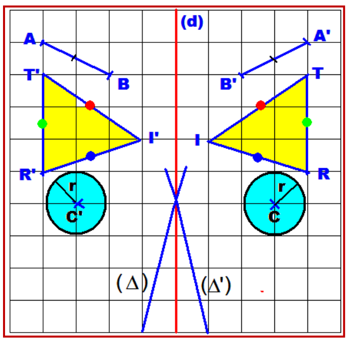


Une transformation est un mécanisme qui à un point fait correspondre un autre point selon une règle précise. **Définition:** La symétrie axiale d'axe (d) transforme tout point M en un point M' tel que (d) est la médiatrice de [MM'].
Le transformé M' s'appelle aussi image de M par la symétrie d'axe (d).
Plus M est proche de (d), plus M' l'est aussi. On devine donc que si M est sur (d) il est confondu avec son image M'.



Construire M', le symétrique de M par rapport à (d).
On trace un cercle de centre M et de rayon r qui coupe (d) en A et en B.
En conservant le même rayon on trace les cercles de centre A et de centre B.
Ils se coupent en M'.
En effet A et B sont équidistants de M et de M', (AM=AM'=BM=BM'= r) donc la droite (AB) est la médiatrice de MM'.

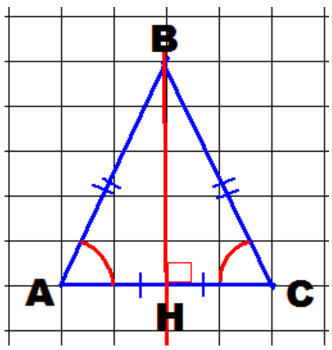
Symétriques de quelques figures



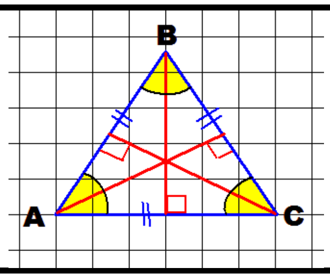
La symétrie axiale conserve les longueurs, l'alignement, les aires, les angles.

Le transformé d'un segment est un segment de même longueur.
Le transformé d'une droite est une droite. Si une droite coupe l'axe, son image le coupe aussi au même point et l'axe est la bissectrice des 2 droites.
Le transformé d'un triangle est un triangle ayant des côtés de même longueur, les mêmes angles, la même aire.
Le transformé d'un cercle est un cercle de même rayon, de même aire, les centres étant symétriques l'un de l'autre.

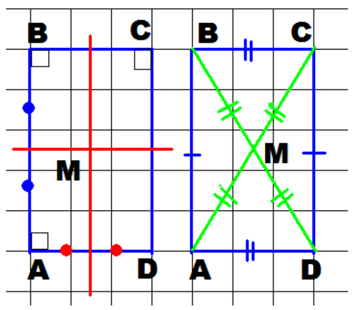
Polygones familiers à symétrie axiale



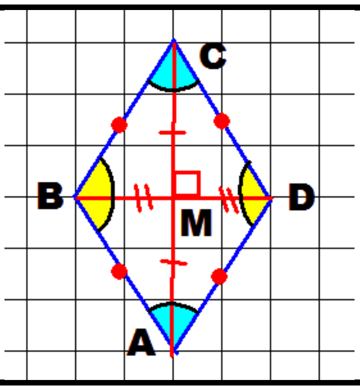
L'axe de symétrie du **triangle isocèle** est la hauteur issue du sommet principal qui de ce fait est aussi médiatrice, médiane, bissectrice.
Un triangle qui admet un axe de symétrie est obligatoirement isocèle (ou équilatéral) car son axe de symétrie passe forcément par un sommet, les côtés qui forment ce sommet sont forcément égaux ainsi que les angles formés avec le 3^{e} côté (conservation des longueurs et des angles).
<u>Pour qu'un triangle soit isocèle il suffit qu'il vérifie une seule des propriétés suivantes:</u>
1) il a un axe de symétrie
2) il a 2 angles égaux
3) il a 2 côtés égaux.
4) l'une de ses droites remarquables a deux fonctions parmi hauteur, bissectrice, médiane et médiatrice.



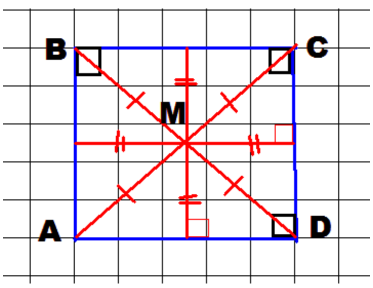
Le triangle équilatéral a 3 angles égaux et 3 côtés égaux.
Ce qui fait que tous ses sommets sont principaux et chacune de ses 3 hauteurs est en même temps, médiatrice du côté opposé, médiane et bissectrice de l'angle dont elle est issue.
Un triangle équilatéral est "triplement isocèle" et de ce fait il a 3 axes de symétrie.
Ses angles sont tous égaux à 60°.



Le rectangle admet 2 axes de symétrie: les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés (en rouge sur la figure). Ces droites sont perpendiculaires à ces deux côtés et parallèles aux deux autres.
Elles se coupent en angle droit et les segments qu'elles déterminent sont égaux 2 à 2.
<u>Un quadrilatère est un rectangle s'il vérifie une seule des propriétés suivantes:</u>
1) il a 3 angles droits
2) ses côtés opposés sont parallèles 2 à 2 et il a un angle droit
3) ses côtés opposés sont égaux 2 à 2 et il a un angle droit
4) ses diagonales sont de longueur égale et se coupent en leur milieu

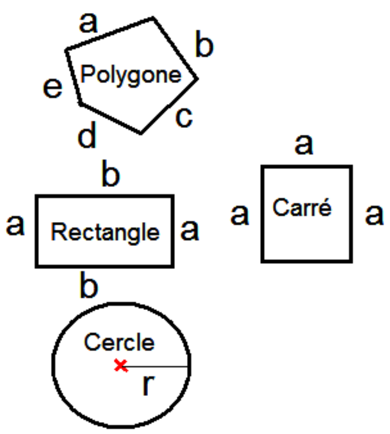


Le losange admet ses diagonales comme axes de symétrie.
Ses 4 côtés sont égaux.
<u>Un quadrilatère est un losange s'il vérifie une seule des propriétés suivantes:</u>
1) ses 4 côtés sont égaux.
2) ses côtés opposés sont parallèles et 2 côtés consécutifs sont égaux.
3) ses diagonales se coupent en leur milieu et en angle droit
4) ses angles opposés sont égaux 2 à 2.



Le carré est à la fois un losange qui a un angle droit et un rectangle dont les 4 côtés sont égaux.
À ce titre il a les 2 axes de symétrie du rectangle (les droites qui joignent les milieux des côtés opposés) et les 2 axes de symétrie du losange (ses diagonales).
<u>Un quadrilatère est un carré s'il vérifie une seule des propriétés suivantes:</u>
1) ses diagonales sont d'égale longueur, se coupent en angle droit et en leur milieu.
2) Il a 4 côtés égaux et un angle droit.
3) il a 3 angles droits et 2 côtés consécutifs égaux.
4) il a ses côtés opposés parallèles, 2 côtés consécutifs égaux et un angle droit.

Périmètres

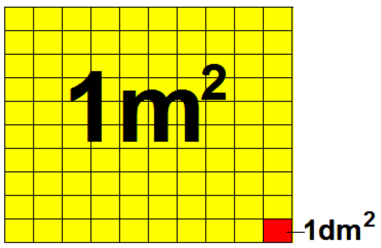


Le unités de longueur usuelles sont

kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Une unité est 10 fois plus petite que celle qui se trouve à sa gauche.
On appelle **périmètre** la longueur du tour d'une figure.
Sur l'illustration a, b, c, d, e, r sont les longueurs des segments correspondants.
Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs de ses côtés
P = a + b + c + d+ e
Pour le carré **P = 4 x a**
Pour le rectangle **P = 2x (a+b)** a+ b est le demi-périmètre.
Un cercle n'a pas de côté. Il a un rayon r ou un diamètre D =2xr Longueur d'un cercle **P =2xπxr** (2πr) ou **P =πxD** (πD) avec **π≈ 3,14**.

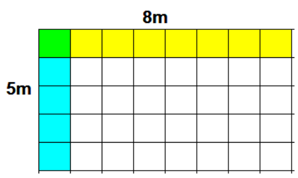
Aires



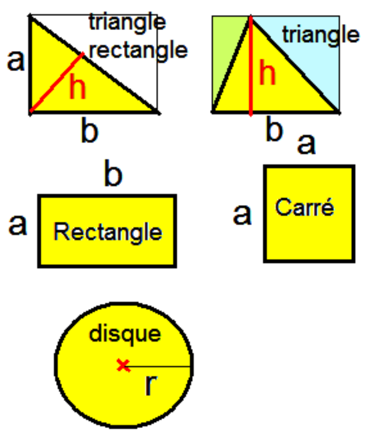
Unités de mesure de l'aire: 1 mètre carré noté $1m^2$ est l'aire d'un carré de 1m de côté, de la même façon 1 décimètre carré noté $1dm^2$ est l'aire d'un carré de 1 dm de côté, etc …
Comme sur la figure ci-contre 1 carré de $1m^2$ peut être "pavé" de 10 lignes (ou 10 colonnes) de 10 pavés carrés de 1dm de côté, ce qui fait 100 pavés de $1dm^2$. On a donc $1m^2 = 100\ dm^2$ et plus généralement toute unité d'aire est 100 fois plus grande que celle qui est immédiatement à sa droite dans le tableau suivant:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
$1000000m^2$	$10000m^2$	$100m^2$	1	$0{,}01m^2$	$0{,}0001m^2$	$0{,}000001m^2$

Aires de quelques figures usuelles.



On doit imaginer qu'on pave ces figures avec des carrés dont l'aire est l'unité de mesure et compter ces carrés.
Pour le rectangle c'est facile, si la mesure d'un côté est 8m on peut ranger 8 carrés de 1 m de côté le long de sa longueur.
Et si la mesure du côté consécutif est 5m, on va pouvoir faire 5 rangées de 8 carrés soit en tout 5 x 8 carrés de $1m^2$ pour paver ce rectangle. Son aire est donc $A = 40m^2$.



Plus généralement si les dimensions du rectangle sont a et b.
L'aire du rectangle est A = a x b
L'aire du carré est A = a x a
L'aire du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b est la moitié de l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent a et b.
Donc **l'aire du triangle rectangle est A=** $\frac{a \times b}{2}$
La hauteur h d'un triangle quelconque le découpe en 2 triangles rectangles et il est facile de voir que si b est la base relative à la hauteur, l'aire du triangle est la moitié de l'aire d'un rectangle de dimensions, b sur h.
Donc **l'aire du triangle quelconque est A=** $\frac{b \times h}{2}$
Quant à l'aire du disque elle est à peu prés égale à 3,14 fois l'aire du carré dont le côté est égal au rayon.
Soit **aire du cercle = π x r x r** notée $A= \pi r^2$.