Probabilités et statistique

Table des matières

Ensembles

En mathématiques, la notion d'ensemble est une notion primitive et à ce titre elle ne peut être définie précisément. Disons que l'**ensemble** est un groupement, une collection d'objets appelés "**éléments**".
$\mathbb{N}$ (entiers naturels) ; $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs) ; $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels) ; $\mathbb{R}$ (nombres réels) sont des ensembles infinis dont les éléments sont des nombres.

Notations les plus courantes

{ } **[ ]**	**E={1;3;5}** ensemble formé de 3 éléments 1, 3 et 5 **P={x tels que x vérifie telle propriété}** ensemble des éléments vérifiant une propriété donnée. **P = [2;5]** ensemble des nombres réels compris entre 2 et 5 inclus
–	**E – F** (E privé des éléments de F) **$\mathbb{Z}$ – {0}** ($\mathbb{Z}$ privé du 0 encore noté $\mathbb{Z}^*$ autrement dit "z étoile"}
∈ ∉	**X ∈ E** (x appartient à E) **X ∉ E** (x n'appartient pas à E). Signalent l'appartenance ou la non-appartenance d'un élément à un ensemble
⊂ ⊆ ⊄	**E ⊂ F** (E inclus dans F) **E ⊆ F** (E inclus dans F ou égal à F) **E ⊄ F** (E non inclus dans F) Signalent l'inclusion (ou la non inclusion) d'un ensemble dans un autre. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
∀ ∃ |	**∀x ∈ E** (**Pour tout** x appartenant à E ou **Quel que soit** x appartenant à E) **∃ n ∈ $\mathbb{N}$** (**il existe** n appartenant à $\mathbb{N}$) **| x = 2n** (**tel que** x = 2n) Facilitent la rédaction d'une démonstration ou l'expression d'une propriété.
⟹ ⟺	**X ∈ $\mathbb{R}$ ⟹ x^2 +1 =0 n'a pas de solution** (La vérité de la 1ere proposition **implique** la vérité de la 2eme) **X∈ $\mathbb{Q}$ ⟺ ∃ a ∈ $\mathbb{Z}$ et b∈ $\mathbb{Z}$ –{0} | X = $\frac{a}{b}$** (Les 2 propositions sont **équivalentes**) Soulignent l'existence d'un lien logique entre deux propositions.
∅	**E= ∅** E est vide. E ne contient aucun élément. **∅** Ensemble vide.

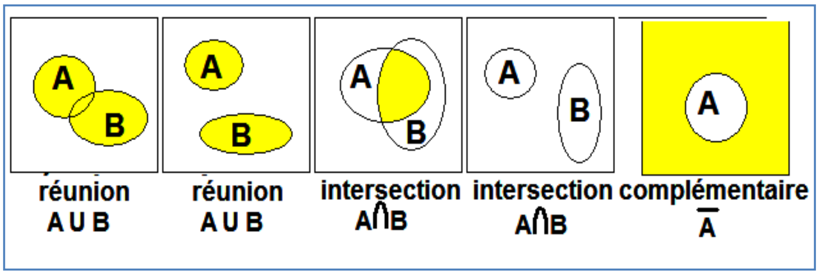
Un peu de vocabulaire

Un ensemble **fini** est un ensemble dont on peut compter les éléments et en donner le nombre.
Si un ensemble n'est pas fini, il est **infini**.
C= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} L'ensemble des chiffres en base 10 est fini. [0,1] l'intervalle de $\mathbb{R}$ est infini.

2 propriétés spécifiques aux ensembles de nombres:
Un ensemble de nombres **discret,** E, est un ensemble tel que pour tout x ∈E, il existe un intervalle centré sur x ne contenant aucun autre nombre de E que x.
$\mathbb{N}$ est discret car $\forall x \in \mathbb{N}$ le seul entier contenu dans [x–0,1; x+0,1] est x.
Un ensemble non discret comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ est dit **continu.**
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon$ étant aussi petit que l'on veut, l'intervalle [x– **ε** ; x+ **ε**] contient toujours le réel y=x+$\frac{\varepsilon}{2}$ ≠x
Pour simplifier si une variable prend des valeurs discrètes on peut énumérer toutes ses valeurs possibles sous la forme x_i avec i ∈ $\mathbb{Z}$ et les classer dans un ordre donné $\{\ldots ; x_{-1}; x_0; x_1; x_2; \ldots\ldots\}$ tandis que pour une variable continue on ne peut pas car entre x_i et x_j il y aura toujours une valeur intermédiaire possible.
Le nombre d'enfants est une variable discrète. Le poids d'un enfant est une variable continue.

Opérations sur les ensembles

La définition des principales opérations sur les ensembles est supposée connue:

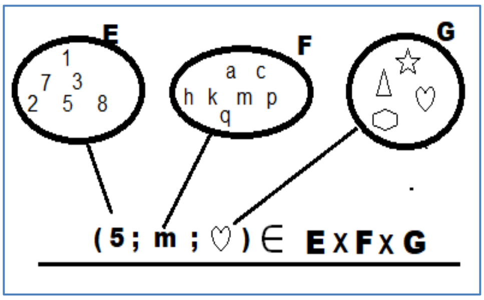


Réunion : ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.
Intersection : ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B (cet ensemble peut être vide).
Complémentaire de A dans Ω, ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Noté aussi Ω – A.

Compter les éléments ou associations d'éléments d'un ensemble

Cardinal d'un ensemble E: C'est son nombre d'éléments. On écrit par exemple **Card(E)** =12.

L'ensemble produit C'est un ensemble formé par l'association de plusieurs ensembles
Soit 3 ensembles E, F, G. Un élément a de l'ensemble produit E x F x G s'écrit
a =**(x; y; z)** où x ∈ E, y ∈ F et z ∈ G. a =**(x; y ; z)** est un triplet, x, y, z ses composantes.



On peut ainsi construire l'ensemble produit de 2, 3, ou n ensembles.
L'élément de l'ensemble produit de n ensembles s'appelle un n-uplet.
Dans le cas de l'ensemble produit de 2 ensembles l'élément (x,y) est aussi appelé couple ou doublet.
L'ordre dans lequel on écrit un n-uplet est fondamental car il indique à quel ensemble appartient chacune de ses composantes.
$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Les coordonnées d'un vecteur ou d'un point du plan (x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$.
Si card(E)=n, card(F)=p et card(G)=q alors card(ExFxG) = npq

Sous-ensemble ou partie d'un ensemble Tout ensemble A formé exclusivement d'éléments de E et différent de E est appelé sous-ensemble de E ou partie de E. On note A ⊂ E (A inclus dans E) .
En ajoutant E et l'ensemble vide ∅ aux parties de E on dit que les parties de E forment **une tribu $\mathcal{P}$(E)**.
Si E contient n éléments, la tribu des parties de E comporte 2^n éléments (Card($\mathcal{P}$(E) =2^n)

Exemple: parties d'un ensemble de 3 éléments	1; 2; 3	1;2	1;3	2;3	1	2	3	∅	2^3=8 parties

Prélèvements dans un ensemble.

■ Dans un ensemble E contenant **n** éléments on peut prélever **p** éléments simultanément ou consécutivement un par un.
Si on les prélève simultanément on obtient ce qu'on appelle **une combinaison de p éléments de E**.
Une combinaison est un sous- ensemble non ordonné de E. Par exemple {k, m, a} combinaison de 3 lettres su 26. **Le nombre de combinaisons possibles de n objets p à p est donné par <u>la touche nCr de la calculatrice</u> on le note nCr(n,p) ou $\binom{n}{p}$ ou C_n^p .**

nCr(5,2)=10	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	2,4	2,5	3,4	3,5	4,5	Sur la calculatrice on tape 5 nCr 2 = 10

■ Si on prélève les p éléments de E un après l'autre (consécutivement) <u>sans remise</u>, on peut considérer que l'ordre a de l'importance ou non.
Si l'ordre n'a pas d'importance on a encore prélevé une combinaison de p objets {k,m,a} = {m;a;k} .
Si l'ordre a de l'importance on note le prélèvement entre parenthèses pour signifier qu'il est ordonné.
(k;m;a)≠(m;a,k). Un tel prélèvement s'appelle **un arrangement de n objets p à p**, le rang d'un objet dans le n-uplet est celui de son tirage. (k;m;a) → k tiré en 1er , m tiré en 2^e, a tiré en 3^e.
Le nombre d'arrangements possibles de n objets p à p est donné par <u>la touche nPr de la calculatrice</u> on le note nPr(n,p) ou A_n^p.

nPr(4,2)=12	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4	Sur la calculatrice on tape 4 nPr 2 = 12
	2,1	3,1	4,1	3,2	4,2	4,3	

■ Si on prélève les p éléments un à un <u>avec remise</u>, cela signifie qu'un prélèvement peut contenir deux fois le même élément. Par exemple on peut obtenir (a;k;a) qui est un élément de ExExE = E^3.
En fait quand on prélève p objets avec remise dans un ensemble E en contenant n, c'est comme si on prélevait **un élément de l'ensemble produit E^p** et le nombre de prélèvements possibles dans ce cas est le nombre d'éléments de E^p soit **n^p**.
Par exemple si on veut connaître le nombre de prélèvements possibles de 2 éléments dans un ensemble de 4 éléments quand on procède avec remise. On va trouver les 12 arrangements du tableau précédent + les 4 doubles (1;1) (2;2) (3;3) et (4;4) donc en tout 16 prélèvements = 4^2.

■ Enfin soit un arrangement de p objets (x1; x2; …;xp) on peut se demander de combien de façons différentes on peut classer ces p objets, autrement dit on peut se demander le nombre d'arrangements différents, de permutations, qu'on peut faire avec une même combinaison de p objets.
On appelle ce nombre **le nombre de permutations possibles de p objets**.
Ce nombre, factorielle p est noté p! (<u>touche n! de la calculatrice</u>) p! = p(p-1)(p-2)….(2)(1).
Par exemple pour 3 objets on obtient 3x2x1 = 6 ordres possibles.

3!=6	A,B,C	A,C,B	B,A,C	B,C,A	C,A,B	C,B,A	Sur la calculatrice on tape 3 n! = 6

Statistique descriptive

En statistique on étudie le lien entre les éléments d'un ensemble et des nombres qu'aucune loi mathématique ne permet apparemment d'expliquer.
Quelquefois les éléments n'ont aucun **caractère** particulier (par exemple l'ensemble des mois de l'année quand on les lie à une consommation mensuelle de n'importe quoi).
Mais le plus souvent on étudie un **caractère commun** à tous les éléments (couleur de cheveux, poids, km parcourus par des voitures, note obtenue par des élèves à un devoir). Ce caractère est décliné en plusieurs **modalités**: {Roux, brun, blond} pour la couleur de cheveux, {0,1,2…,20} pour la note obtenue et la statistique consiste à étudier comment ces modalités sont quantitativement réparties dans l'ensemble des éléments, qu'on appelle "population".
Un caractère peut être **qualitatif** (couleur, sexe), **quantitatif discret** (note) ou **quantitatif continu** (poids).

Regroupement en classes, effectifs, fréquences

Le nombre d'éléments de l'ensemble étudié (la population) est **l'effectif total**.
Les éléments sont regroupés en **classes** de même modalité pour le caractère étudié.
Par exemple la classe des bruns, la classe des roux, la classe des blonds…
La classe de ceux qui ont 0 enfant, la classe de ceux qui ont 1 enfant, la classe de ceux qui ont 2 enfants,…
Pour un caractère quantitatif continu une classe correspond à **un intervalle de valeurs**.
Par exemple le poids d'un individu peut se situer dans un intervalle]0;10] ou]10;20] ou]20;30], etc.
A chaque intervalle correspond une classe d'individus. La classe des individus pesant entre 20 et 30 kilos.
A chaque classe correspond **un effectif de classe** qui est le nombre d'éléments de la classe.
On appelle **fréquence** d'une classe le rapport de l'effectif de classe à l'effectif total **fréquence** $=\frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$

Quand le caractère étudié est quantitatif

Il peut être discret, sa valeur (sa modalité) est une **variable numérique X** (par exemple une note obtenue).
Il peut être continu et on prend pour variable de classe X le centre des intervalles définissant les classes.
Par exemple pour un poids situé entre 10 et 15 kilos on prend X =12,5.
A chaque valeur de cette variable discrète est associée une classe (la classe de ceux pour qui X=10). A chaque classe correspond un effectif de classe (le nombre de ceux pour qui X=10) et une fréquence de classe (fréquence de 10 = 0,12 si la classe de X=10 regroupe 12% de l'effectif total).
On appelle "**série statistique**" l'ensemble des nombres liés à X révélés par l'étude d'une population pour un caractère donné. **L'étendue de la série** est la différence entre les valeurs extrêmes de X (Etendue = $X_{max} - X_{min}$).
La série est dite "**élaguée**" quand on en a supprimé les valeurs aberrantes.

On peut représenter la série statistique dans un tableau où les valeurs de X sont les modalités étudiées.

Classe	1	2	3	…	p	Somme
Variable X	X1	X2	X3	…	Xp	
Effectif	n1	n2	n3	…	np	N
Total classe	n1X1	n2X2			npXp	S
Fréquence	f1	f2	f3	…	fp	1

D1: On définit $\bar{X}$ **la moyenne de X** $\bar{X} = \frac{X1n1+X2n2+\cdots..+Xpnp}{N}$
On peut vérifier que $\bar{X} = X1f1 + X2f2 + \cdots ... + Xpfp$ et S=$\bar{X}N$
On obtiendrait la même valeur pour la moyenne si au lieu de regrouper les éléments en classes on faisait la somme des valeurs de X affectées à chaque élément (on obtiendrait S) et qu'on divisait cette somme par le nombre N d'éléments.

P1 : Si on remplace chaque valeur de X par aX+b (a et b étant des nombres fixés) la moyenne devient a$\bar{X}$+b.
P2 : Soit E d'effectif p de moyenne $\overline{X_E}$ et F d'effectif q de moyenne $\overline{X_F}$ la moyenne de X dans E ∪ F est $\bar{X} = \frac{\overline{X_E}.p+\overline{X_F}.q}{p+q}$

Effectifs cumulés, médiane, quartiles, mode.

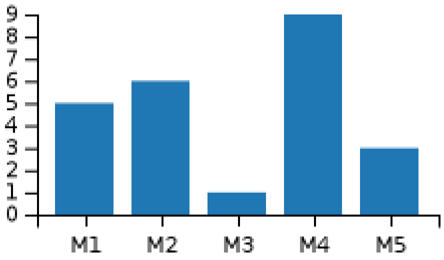
On range les classes dans l'ordre des X croissants de X1 à Xp.
On appelle **effectif cumulé EC(Xi)** la somme des effectifs de classes pour lesquelles X ≤ Xi.
On peut donc compléter le tableau précédent, la dernière ligne représentant EC(Xi) l'effectif cumulé pour X ≤ Xi.

Classe	1	2	3	…	p	Somme
Variable X	X1	X2	X3	…	Xp	
Effectif	n1	n2	n3	…	np	N
EC(X)	n1	n1+n2	n1+n2+n3	…	N	

On remarque que le dernier effectif cumulé EC(Xp)=N.
P1: en supposant que les N éléments soient individuellement rangés selon l'ordre croissant de leur variable X, l'effectif cumulé nous apprend dans quelle classe se situe un élément selon son rang.

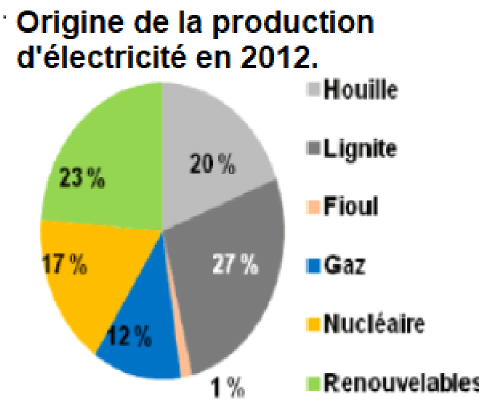
D1 : Si N est impair **la médiane** est la valeur de X pour la classe de l'élément de rang $\frac{N+1}{2}$ (rang 11 si N=21)
Si N est pair **la médiane** est la moyenne de X pour les classes des éléments de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}$+1 (50 et 51 si N=100)
D2: Les 1^er et 3^eme **quartiles** sont les valeurs de X pour lesquelles l'effectif cumulé atteint ou dépasse $\frac{1}{4}N$ et $\frac{3}{4}N$
De la même manière, les **déciles** sont les valeurs de X pour lesquelles l'effectif cumulé atteint ou dépasse $\frac{d}{10}N$ (d=1,…9)
P2 : On peut aussi raisonner en **fréquence cumulée** (de 0 à 1). Dans ce cas les seuils de fréquence cumulée correspondant aux déciles sont (0,1; 0,2;…;0,9) pour les quartiles (0,25; 0,75) pour la médiane (0,5)
D2 : L'écart interquartiles est la différence entre le 3^e et le premier quartile.
D3 : Le mode est la valeur de la variable correspondant à la classe dont l'effectif est le plus nombreux.

Représentation graphique d'une série statistique



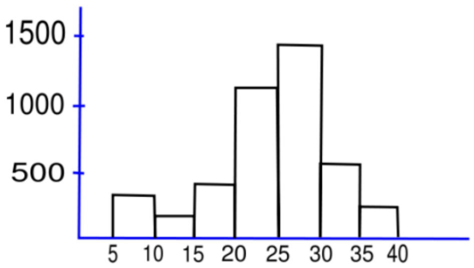
Le diagramme en bâtons.

On l'utilise quand les classes sont liés à un caractère qualitatif (M1,M2,..M5 pourraient être des couleurs de voitures) ou à un caractère quantitatif discret (M1,.,M5 pourraient être les notes d'une classe).
Les bases des rectangles sont séparées (valeurs distinctes ou discrètes) .
La hauteur de chaque rectangle rapportée au repère vertical donne l'effectif de chaque classe (5 pour M1, 6 pour M2, etc.)
Pour plus de clarté l'effectif de la classe peut figurer au-dessus du rectangle.



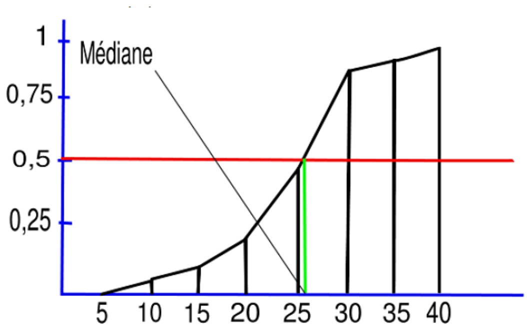
Le diagramme en camembert.

On l'utilise quand on veut mettre en lumière la part de chaque classe dans un montant total.
Dans cet exemple le caractère étudié est l'origine de l'énergie d'un pays, ses modalités sont houille, lignite , etc… et à chaque modalité correspond une part de la production totale d'énergie.
La part de chaque modalité est traduite en pourcentage du total et c'est ce pourcentage qui figure dans chaque portion du camembert.
Pour calculer la valeur de l'angle au centre correspondant à chaque secteur, il suffit de multiplier 360° par le pourcentage du total que représente le secteur.
Par exemple pour la houille (20% du total) on a multiplié 360 par 0,2 et on a trouvé un secteur angulaire de 72°.



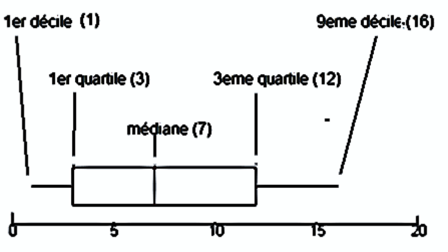
L'histogramme

On l'utilise quand les classes sont liées à des intervalles de valeurs (que la variable numérique étudiée soit continue ou discrète).
Sur l'axe horizontal figurent les limites de ces intervalles (par exemple l'intervalle [5;10[représente la classe des chiens qui pèsent entre 5 et 10kg, [10;15[représente la classe des chiens qui pèsent entre 10 et 15 kilos etc.)
Les intervalles peuvent être d'amplitudes égales ou différentes mais en règle générale ils sont adjacents. A un intervalle correspond une classe.
La hauteur des rectangles indique l'effectif de la classe correspondante.



Le polygone des fréquences cumulées.

Ici, il reprend les valeurs de l'histogramme précédent.
Supposons que f1, f2, …,f7 sont les fréquences correspondant aux 7 classes de l'histogramme. f1 correspond à [5,10[, f2 à [10,15[etc.
Le polygone relie les points (5,0) à (10,f1), puis à (15, f1+f2), puis à (20,f1+f2+f3) jusqu'à (40,1) 1 étant la somme des 7 fréquences.
La droite d'équation y = 0,5 coupe le polygone en un point dont l'abscisse est la médiane de la série (un peu plus de 25) .
De la même façon les droites y =0,25 et y=0,75 coupent le polygone en des points dont les abscisses respectives sont le 1er et le 3ème quartile.
Le **polygone des effectifs cumulés** est basé sur le même principe.



La boîte à moustaches

Illustre les paramètres descriptifs de la série
Par rapport à l'axe gradué.
Les bouts des moustaches indiquent la valeur du 1er et 9eme décile.
Les bords de la boite indiquent la valeur des 1er et 3eme quartiles
La longueur de la boite est l'écart interquartiles.
Le repère intérieur à la boîte indique la valeur de la médiane.

Echantillonnage

On appelle **échantillon** un sous ensemble d'une population nombreuse prélevé au hasard.
Le nombre **n** d'éléments de l'échantillon est appelé "**taille de l'échantillon**".
Dans cet échantillon, par simple comptage, on peut déterminer **la fréquence f de la modalité d'un caractère** auquel on s'intéresse.
Par exemple le nombre de femmes dans un échantillon de personnes (caractère sexe, modalité femme)
Le nombre de pièces défaillantes dans un stock prélevé à la sortie d'une usine (caractère état, modalité mauvais)
L'intention de vote dans un panel d'électeurs (caractère intention de vote, modalité vote pour untel).

L'échantillonnage est utile dans 2 cas de figures

Appelons p la fréquence réelle de la modalité étudiée dans la population

1. Soit on connait p et on veut savoir si notre échantillon reproduit à son échelle les proportions approximatives de la population.
2. Soit on ne connaît pas p et on compte sur notre échantillon pour en donner une valeur approchée.

Mais pour que notre expérimentation soit valable il faudra qu'elle vérifie **le préalable** suivant:

La taille de l'échantillon devra être au moins égale à **25**.
La fréquence à approcher ou à estimer ne devra pas être inférieure ou égale à **0,2** ou supérieure ou égale à **0,8**

.
Ce préalable étant respecté.

Soit **p** la fréquence **connue** de la modalité étudiée dans la population
Soit **f** la fréquence (mesurée) de la modalité étudiée dans un échantillon de taille **n**
On peut établir que dans 95% des échantillons de taille n la fréquence f devrait être telle que $f \in [\, p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$

Cet intervalle est appelé "Intervalle de fluctuation au seuil de 95%" ou "au risque de 5%".
Cette loi peut nous servir à estimer si notre technique d'échantillonnage est correcte.
A rejeter les échantillons hors norme.
A juger si une communauté de personnes ou une collection d'objets (considérées comme des échantillons si leur taille est suffisante) respectent les règles imposées par la société.
Par exemple à savoir si les règles de la mixité sont respectées au sein d'une entreprise ou d'une assemblée.
A savoir si la production d'une usine respecte les normes de sécurité ou de fiabilité.

Inversement

Soit **p** la fréquence **inconnue** de la modalité étudiée dans la population
Soit **f** la fréquence (mesurée) de la modalité étudiée dans un échantillon de taille **n**
On peut établir qu'il y a 95% de chances pour que p appartienne à l'intervalle $[\, f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$

Cet intervalle est appelé "fourchette du sondage au seuil de 95%" ou "au risque de 5%"
Cette loi peut nous servir à estimer la proportion (la fréquence) d'une modalité dans une population trop nombreuse pour être exhaustivement comptée.

Remarque:

L'intervalle de fluctuation est centré soit sur **p** soit sur **f** (valeur connue), son rayon est $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et son amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
Plus n est grand plus la fourchette de l'estimation est réduite
Si n = 25 le rayon de notre intervalle est 0,2. (0.2 c'est beaucoup quand on évalue une fréquence comprise entre 0.2 et 0.8)
Si n = 100 ce rayon est 0,1
Si n = 1000 ce rayon est 0.03
Si n = 2500 il est 0,02.
Et plus la fourchette est réduite, plus notre estimation est fiable.
Il existe aussi des estimations au seuil de 90% (moins précises) ou au seuil de 99%.

Probabilité: définition, notions de base, vocabulaire.

On peut considérer ce qui suit comme la définition de la probabilité au sens mathématique.

Une **expérience aléatoire** est une expérience où seul le hasard intervient pour produire un résultat appelé **issue** parmi plusieurs possibles.

En règle générale, l'opération qui nous met en présence de l'issue est appelée "tirage". Avant de tirer au hasard un ou plusieurs éléments d'un ensemble, on spécule sur la nature de l'issue que va produire l'expérience et la probabilité est un nombre qui permet de mesurer, de comparer, de peser les différentes possibilités sur lesquelles on spécule.
Par exemple, si on spécule sur la possibilité de tirer au hasard une boule rouge dans une urne qui en contient des bleues, des blanches et des rouges, on peut imaginer que la probabilité de cet évènement va être liée, à la proportion de boules rouges que contient l'urne. Plus les boules rouges seront nombreuses, plus cette probabilité sera grande.
Remarquons que l'issue de notre expérience est la boule tirée mais qu'on spécule sur un évènement qui est sa couleur autrement dit on spécule sur la possibilité de tirer une boule appartenant au sous-ensemble des boules rouges.

En probabilités, on appelle **univers** (et on note **Ω**) l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.
Les évènements sont les sous –ensembles de Ω présentant les propriétés suivantes:
- ■ Ω et ∅ sont des évènements.
- ■ Le complémentaire dans Ω d'un évènement A est un évènement appelé évènement contraire, noté $\bar{A}$.
- ■ Toute réunion d'un nombre fini d'évènements est un évènement.

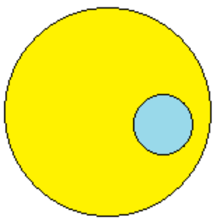
Un évènement formé d'une seule issue est un "évènement élémentaire".

Pour pouvoir calculer la probabilité des évènements, il faut que tous soient **mesurables** au sens mathématique.
Soit E un évènement, sa mesure m fait correspondre à E un nombre réel positif ou nul m(E) tel que
P1. m(∅) = 0
P2. Si E1, E2, …En sont des évènements disjoints m(E1 U E2 U…U En) = m(E1)+m(E2)+….+m(En).
Lorsque tous les évènements sont mesurables **la probabilité P(E)** d'un évènement est le nombre
P(E)=$\frac{mesure\ de\ E}{mesure\ de\ \Omega}$

Des propriétés de la mesure on tire immédiatement
- ■ **Soit A un évènement: sa probabilité, P(A) est un nombre réel compris entre 0 et 1**
- ■ P(∅)=0 P(Ω)=1
- ■ Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω on a P($\bar{A}$) = 1 – P(A). (Puisque A et $\bar{A}$ sont disjoints et que A U $\bar{A}$ =Ω)
- ■ Si A et B sont 2 évènements disjoints on a P(A U B) = P(A) + P(B). (Tiré de la propriété P2 de la mesure ci-dessus)
- ■ Si A et B ont une intersection on a P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A∩B). (Tiré de AUB =(A–A∩B) U (B– A∩B) U (A∩B))

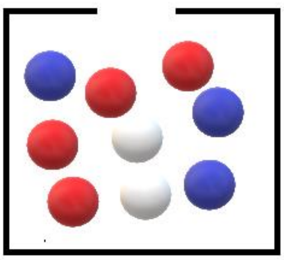
D'après ces définitions

Cas d'ensembles infinis mesurables. Soient 2 disques tels que (C, r) ⊂ (O, R). (C,r) en bleu sur le dessin.



Expérience aléatoire je pique (je tire) un point au hasard dans (O,R) parmi une infinité de points.
Le disque (O,R) est l'univers Ω.
Soit l'ensemble des disques D inclus dans Ω et de leur complémentaire $\bar{D}$ dans Ω (en jaune sur le dessin). Si on y ajoute les points considérés comme des disques de rayon nul (∅) et Ω lui-même, on obtient une famille des sous-ensembles de Ω dont on sait calculer la mesure (πr^2 ou $\pi R^2 – \pi r^2$)
Cette famille peut être considérée comme une famille d'évènements de l'univers Ω .
Si on appelle D le disque bleu, la probabilité pour qu'un point tiré au hasard dans Ω soit un point appartenant à D est P(D)=$\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$ = $\frac{r^2}{R^2}$.
Remarquons que la probabilité de tirer un point particulier (par exemple O) est nulle.

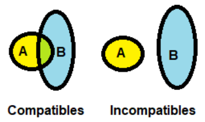
Dans le cas d'un univers contenant des issues en nombre fini



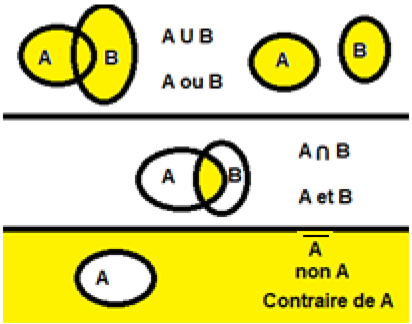
Par exemple on tire une boule dans l'urne ci-contre contenant 9 boules de couleurs différentes.
Pourvu que toutes les issues soient **équiprobables** (c'est-à-dire pourvu que le procédé de tirage ne favorise aucune d'elles),
- ■ **Toute partie ou sous-ensemble d'issues constitue un évènement**
- ■ **Le nombre d'issues d'un évènement en constitue une mesure**.

Si bien que la probabilité d'un évènement E = $\frac{Nombre\ d'issues\ de\ E}{Nombre\ d'issues\ de\ \Omega}$ = **fréquence de E dans Ω** .
Dans l'urne ci-contre la probabilité du sous-ensemble des boules rouge est $\frac{4}{9}$.
C'est la probabilité de tirer une boule rouge notée P(Rouge) et la fréquence des boules rouges dans l'urne.

Evènements composites



2 évènements A et B sont **incompatibles** lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun.
Autrement dit leur intersection est vide. Dans le cas contraire ils sont compatibles.

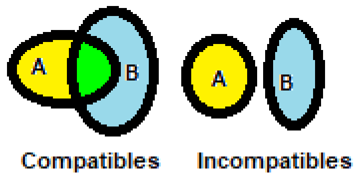


L'évènement **A ou B** est la réunion des évènements **A U B**.
C'est l'ensemble qui réunit les issues de A et les issues de B.

L'évènement **A et B** est l'intersection des évènements **A ∩ B**.
C'est l'ensemble des issues de A qui appartiennent aussi à B ou {x∈B | x∈A}

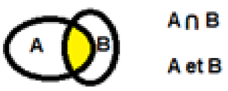
L'évènement **non A** ou **contraire de A** est le complémentaire de A dans Ω (Ω –A).
C'est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A.
On a vu que **P(non A) ou P($\bar{A}$)= 1 – P(A)**

Probabilité de A ou B



Si A et B sont incompatibles, A ∩ B = ∅, A et B disjoints donc
P(A U B) = P(A)+P(B)
Si A et B sont compatibles A et B ont une intersection non vide.
A U B est la réunion de **A–A ∩ B U A ∩ B U B–A ∩ B** (3 sous-ensembles disjoints)
Donc P(A U B) = **P(A–A ∩ B) + P(A ∩ B) + P(B–A ∩ B)**
Or, P(A) = P(**A–A ∩ B**)+P(**A ∩ B**) et P(B)= P(**B–A ∩ B**)+P(**A ∩ B**). D'où
P(A U B) = P(A) + P(B) –P(A ∩ B)

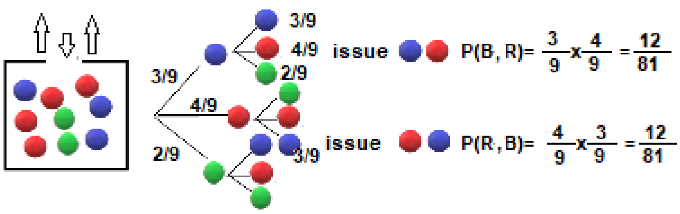
Probabilité de A et B



Si on sait compter les issues dans A ∩ B on a **P(A et B) =** $\frac{Card(A \cap B)}{Card\ (\Omega\ )}$ (calcul prioritaire).
Si on connait P(A) et P(B) comme les fréquences de A et de B dans Ω <u>et qu'on suppose que A et B sont uniformément répartis dans Ω</u> ce qui signifie que P(B) est non seulement la fréquence de B dans Ω mais aussi la fréquence de B dans tout sous ensemble de Ω et en particulier dans A.
Si la fréquence de A dans Ω est P(A) et la fréquence de A ∩ B dans A est P(B) alors la fréquence de A ∩ B dans Ω est P(A ∩ B) ou **P(A et B) = P(A).P(B)**.

Tirages multiples

Il peut s'agir de tirages avec remise ou de tirages sans remise. De tirages dans le même ensemble ou dans plusieurs ensembles différents. De tirages ordonnés ou pas selon que tirer x suivi de y est différent de tirer y suivi de x ou pas.
Dans ce contexte l'univers est composé d'issues de type (x_1; x_2; …x_n) où x_i est le résultat du i^{eme} tirage.



Ici, on effectue un premier tirage dans une urne contenant 4 boules rouges, 3 bleues et 2 vertes.
On remet la boule tirée dans l'urne et on en tire une autre.
Les branches de l'arbre ci-contre montrent toutes les façons dont les 2 évènements formant chaque tirage peuvent s'enchaîner pour donner toutes les issues possibles. Chaque branche est pondérée par la probabilité de son évènement.
Chaque évènement de Ω est un couple de 2 couleurs
Par exemple (B,R) est l'évènement correspondant au tirage d'une bleue suivie d'une rouge.

L'ordre du tirage est-il important?
Pour savoir si (R,B) est un évènement différent de (B,R) il faut que le protocole de l'expérience aléatoire nous l'indique.
S'il s'agit du même évènement on aura tendance à le noter {B,R} et sa probabilité P({B,R}) sera égale à la somme P(B,R)+P(R,B).

Pourquoi faut-il multiplier la probabilité de 2 branches consécutives pour calculer P(B,R) ?
En fait si on appelle E l'ensemble "urne" c'est comme si on tirait un élément de l'ensemble produit ExE.
Combien d'éléments dans l'univers ExE ? 9 x 9 et combien de ses éléments correspondent à l'évènement (B,R)? 3 x 4 .
Donc la probabilité de (B,R) est $\frac{3\times4}{9\times9}$ autrement dit $\frac{3}{9} \times \frac{4}{9}$ et on a bien P(B,R)= P(B)xP(R).
On peut vérifier qu'en ajoutant les 9 probabilités des évènements constituant Ω P(B,B)+P(B,R)+…+P(V,V) on trouve 1.

Et si on ne remettait pas la boule tirée dans l'urne?
L'arbre pondéré serait toujours pertinent mais une fois qu'on aurait tiré une boule bleue P(B)=$\frac{3}{9}$, il resterait 8 boules dans l'urne dont 2 bleues P(B)=$\frac{2}{8}$, 4 rouges P(R)= $\frac{4}{8}$ et 2 vertes P(V)=$\frac{2}{8}$, ce qui donnerait les pondérations du 2^{eme} tirage.
On aurait donc P(B,R)=$\frac{3\times4}{9\times8} = \frac{1}{6}$. Si on ne tient pas compte de l'ordre P({B,R}) = P(B,R) + P(R,B) = $\frac{1}{3}$
<u>Autre mode de calcul</u>: le nombre d'issues de Ω est le nombre de combinaisons de 9 objets 2 par 2 nCr(9,3)=**36.** Et le nombre de combinaisons comportant une rouge et une bleue est 4x3 = **12.** Ce qui donne P({B,R})=$\frac{12}{36}$ =$\frac{1}{3}$.