Outils de base

Table des matières

Pré requis

Connaître les ensembles de nombres et leurs techniques opératoires

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (pour compter les choses ou les êtres qu'on trouve dans la nature)
L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (pour évaluer des quantités entières qui peuvent varier autour de zéro)
L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ (les fractions positives et négatives pour mesurer des quantités non-entières)
L'ensemble des décimaux **D** (nombres à virgule ou fractions dont le dénominateur est une puissance de 10)
L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ (l'ensemble de tous les nombres rationnels ou irrationnels comme π ou $\sqrt{2}$)

Savoir, ajouter, soustraire, multiplier, diviser, et calculer les puissances de tous ces nombres.

Savoir distinguer parmi les expressions algébriques, les sommes, produits ou quotients.

Une somme de termes		Un produit ou un quotient de facteurs	
$2x + 3$	$a+b \to a=2x$, $b=3$	$3x$	$ab \to a=3$, $b=x$
$x - y$	$a+b \to a=x$, $b= -y$	ax^2	$ab \to a=a$, $b=x^2$
$2x^2 + (x+3)(4x+7)$	$a+b \to a=2x^2$, $b=(x+3)(4x+7)$	$7(3x+2)$	$ab \to a=7$, $b=3x+2$
$\frac{2x+3}{5} + \frac{3x}{7}$	$a+b \to a=\frac{2x+3}{5}$, $b=\frac{3x}{7}$	$(3x+4)x$	$ab \to a=3x+4$, $b = x$
		$-(5x+3)(x+4)$	$ab \to a= -(5x+3)$, $b=x+4$
		$\frac{3x}{7}$	$\frac{a}{b} \to a =3x$, $b = 7$
		$\frac{5x+7}{2y}$	$\frac{a}{b} \to a =5x+7$, $b=2y$

Connaître les termes et les techniques de calcul des expressions littérales

Les techniques de développement $(a+b)(c+d) = a(c+d) +b(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Les techniques de réduction $3x +5x^2 + 7 - 3 + 4x -x^2 =(5x^2 -x^2) +(3x+4x) +(7-3) = 4x^2 +7x +4$

Les techniques de factorisation $6ax + 8xy + 2zx^3 = 2x(3a +4y +2zx^2)$
$4ax+4bx +3ay +3by = 4x(a+b) + 3y(a+b) = (a+b)(4x+3y)$

Connaître les techniques de transformation des équations ou inéquations

Deux équations ou inéquations sont équivalentes quand elles ont la même solution.

Opération sur les 2 membres	égalité	Egalité équivalente	Inégalité	Inégalité équivalente
Ajout d'un même nombre aux deux membres	$A=B$	$A+k = B+k$	$A<B$	$A+k< B+k$
Soustraction d'un même nombre aux deux membres		$A -k =B -k$		$A-k < B-k$
Multiplication des 2 membres par un nombre positif		$A.p = Bp$		$A.p < B.p$
Multiplication des 2 membres par un nombre négatif		$A.n = B.n$		$A.n > B.n$
Division des 2 membres par un nombre positif		$A/p = B/p$		$A.p < B.p$
Division des 2 membres par un nombre négatif		$A/n = B/n$		$A/n > B/n$

Remarque: quand on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par un nombre **négatif**, pour obtenir une inéquation équivalente, il faut changer le sens de l'inégalité. < devient > et > devient <.

Equations et inéquations dont le second membre est nul et le premier membre un produit ou un quotient de facteurs du premier degré.

Exploitation de la propriété "A.B = 0 si et seulement si A=0 ou B=0".

$(x+2)^2=9$ devient $(x+2)^2- 9 =0$ On factorise $(x+2-3)(x+2+3) =0$ d'où $(x-1)(x+5)=0$ solution $\{1 , -5\}$

Exploitation de la propriété "le signe de A.B dépend de la combinaison des signes de A et de B"

$(x+1)^2 > 4$ transformé en $(x+1)^2- 4 >0$ ou $(x+1-2)(x+1+2) > 0$ ou **$(x-1)(x+3) >0$**

X	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
X–1		–		–	0	+	
X+3		–	0	+		+	
(x–1)(x+3)		+	0	–	0	+	

Une fois obtenue la forme A.B > 0 ou A.B <0
On compare les signes de A et B en fonction de x dans un tableau.
Ici on compare les signes de (x–1) et (x+3) en fonction de x.
Solution: $(x-1)(x+3)>0$ pour $x \in]-\infty ; -3[\cup] 1; +\infty[$

X	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
X–1		–		–	0	+	
X+3		–	0	+		+	
$\frac{x-1}{x+3}$		+	‖	–	0	+	

Pour étudier le signe d'un quotient, ici $\frac{x-1}{x+3}$, on procède de la même façon mais on précise que la fraction n'est pas définie quand le dénominateur est nul. Si son numérateur est nul, la fraction est nulle.
Ici pour que la fraction existe il faut que x soit différent de –3.

Equations et inéquations du premier degré à une inconnue

Techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré.

ANIMATIONS

équations étape 1

équations étape 2

Inéquations étapes 1 et 2

Si ces liens ne fonctionnent pas (Edge) retrouvez ces animations dans le menu principal Lycée.

On peut toujours transformer une équation du premier degré en l'un des 2 types suivants
Type 1. Somme de termes = somme de termes ($ax+b=cx+d$)
Ou
Type 2. Produit ou quotient de facteurs = produit ou quotient de facteurs ($\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$).

Par exemple

On peut réduire les membres au même dénominateur puis supprimer ce dénominateur

$$\frac{3x+7}{2}=\frac{x}{3}+1 \text{ devient } \frac{3(3x+7)}{3(2)}=\frac{2x}{3(2)}+\frac{3(2)}{3(2)} \text{ ou } 9x+21=2x+6 \ (somme = somme)$$

On peut mettre l'équation "en ligne" en faisant le produit en croix.

$$\frac{2x+7}{4x-2}=\frac{2}{3} \ d'\text{où } 3(2x+7)=2(4x-2) \text{ ou } 6x+21=8x-4 \ (somme = somme)$$

On peut développer les produits pour obtenir des sommes

$(2x+7)(x+2)=(x+1)(2x)$ *devient* $2x^2+9x+14=2x^2+2x$ **(les x^2 s'éliminent) (somme = somme)**

On peut aussi transformer une inéquation du premier degré en l'un des 2 types suivants
Type 1. Somme de termes < somme de termes ($ax+b<cx+d$)
Ou
Type 2. Produit ou quotient de facteurs > produit ou quotient de facteurs ($\frac{ax}{b}>\frac{c}{d}$).
Mais attention !
Quand on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif on doit changer le sens de l'inéquation.
Donc quand on multiplie ou divise une inéquation par une expression en x comme (2x+3) on doit discuter du signe de cette expression et si elle est négative changer le sens de l'inéquation

Pour "mettre en ligne" $\frac{x+3}{x+1}<\frac{4}{5}$ on doit discuter du signe de x+1.

Si x+1 est positif autrement dit si x > –1 l'inéquation devient (x+3)5 **<** 4(x+1) ou 5x +15 **<** 4x +4

Si x+1 est négatif autrement dit si x<–1 l'inéquation devient (x+3)5 **>** 4(x+1) ou 5x+15 **>** 4x+4

On doit ensuite discuter de la compatibilité de la solution trouvée avec la condition préalable.
Par exemple si x est < –1 et qu'on trouve comme solution x>–3 on rejette toute solution où x ≥-1.
Reste S=]–3;–1[.

Systèmes d'équations à n inconnues

Méthode dite "de substitution"

1. Dans une équation par exemple e1 on peut toujours calculer par exemple x = f(y,z) (x en fonction de y et z)
2. Si on remplace x par sa valeur dans e2 et e3 ces 2 équations ne contiennent que des y et z.
3. Ensuite dans (par exemple) e2 on calcule y =f(z) (y en fonction de z)
4. On remplace y par sa valeur dans e3 et on obtient une équation à une seule variable z. On calcule z.
5. On reporte sa valeur dans e2 ce qui permet de calculer y.
6. Puis on reporte les valeurs de y et z dans e1 ce qui permet de calculer x.

3x +2 y + z = 10 e1
x + 3y - 2z = 1 e2
-5x + 2y +2z = 5 e3

On choisit la variable la plus facile à isoler dans n'importe quelle équation et on la reporte dans les 2 autres.
Ici commençons par calculer z=f(x,y) dans e1 → **z = 10 – 3x –2y** **e1**
Reportons cette valeur dans e2 et e3
X + 3y –2(10 – 3x –2y) = 1 → 7x +7 y = 21 ou **x + y = 3** **e2**
–5x +2y +2(10 – 3x –2y) = 5 → –11x –2y = –15 ou **11x +2y = 15** **e3**
Dans e2 calculons par exemple y =f(x) → y = 3 –x **e2**
Reportons cette valeur dans e3
11x +2(3–x)=15 → 9x = 9 ou **x =1** **e3**
Remontons x dans e2
1 + y = 3 d'où **y = 2** **e2**
Remontons x et y dans e1
Z = 10 -3(1) –2(2) = 3 **Z = 3** **e1**

Méthode dite "de combinaison"

Elle consiste à éliminer successivement les variables par combinaison des équations

3x +2 y + z = 10 e1
x + 3y - 2z = 1 e2
-5x + 2y +2z = 5 e3

1) on fait en sorte que par exemple x ait le même coefficient <u>au signe prés</u> dans les 3 équations.
Pour cela il faut éventuellement multiplier (ou diviser) chaque équation par un nombre.
Par exemple si on veut que x ait le même coefficient (leur PPCM au signe prés) dans nos 3 équations
5 fois e1 → 5(3x +2 y + z = 10) → **15x** +10y +5z = 50 e1
15 fois e2 → 15(x + 3y - 2z = 1) → **15x** +45y –30z = 15 e2
3 fois e3 → 3(-5x + 2y +2z = 5) → **–15x** +6y +6z =15 e3
2) Ensuite on choisit une équation comme pivot (par exemple e2) et en lui soustrayant ou en lui ajoutant successivement les deux autres on élimine x .
Choisissons e2 (qui a les plus gros coefficients) comme pivot
e2 – e1 donne 35y – 35z = –35 ou **y – z = –1** **e4**
e2 + e3 donne 51y –24z = 30 ou **17y -8z = 10** **e5**
3) Ensuite on combine e4 et e5 pour éliminer par exemple y et on trouve la valeur de z
On aligne les coefficients de y dans e4 et e5 **<u>17y</u> -8z = 10** **e5**
17 fois e4 → 17(y – z = –1) → **<u>17y</u> –17z = –17** **e4**
On combine pour éliminer y : e4 – e5 donne – 9z = –27 d'où **z = 3**
4) On remonte la valeur de z dans e4 pour trouver y → y – 3 = –1 d'où **y = 2**
5) On remonte les valeurs de z et de y dans le pivot e2 pour trouver x + 6 –6 = 1 d'où **x = 1**

Remarques:

1. On simplifie immédiatement les équations dont tous les coefficients sont des multiples d'un même entier
12x+6y+9z=15 (que des multiples de 3) → (on simplifie par 3) 4x+2y+3z=5

2. Quand on multiplie ou divise les 2 membres d'une équation par un même nombre
Quand on ajoute ou soustrait un même nombre aux 2 membres d'une équation
Quand on manipule une équation en faisant passer des termes ou des facteurs d'un membre dans l'autre en utilisant les règles d'usage (par exemple 3x +2 y + z = 10 → z = 10 – 3x –2y)
→ **On obtient une équation équivalente qu'on continue à appeler par son nom (e1 reste e1)**

3. Quand on combine 2 équations pour en obtenir une 3^{e}, on obtient une équation compatible mais pas équivalente.
→ **Donc elle change de nom (en faisant e2 + e3 on obtient par exemple e4).**

4. Choisir judicieusement la méthode à employer ou l'équation à partir de laquelle on évalue une variable en fonction des 2 autres (substitution) ou l'équation qui va nous servir de pivot (combinaison) peut simplifier beaucoup les calculs.

Polynômes et équations du second degré à une inconnue.

Un **polynôme du second degré** est une expression littérale de la forme ax^2+bx+c où a ,b, c sont des nombres réels. Par exemple $2x^2 - 0{,}2x + \frac{1}{3}$.

Factorisation canonique.

1. on met a en facteur $ax^2+bx+c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

2. On considère $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début du développement d'un carré. $\frac{b}{a}x$ est le double produit $2\frac{b}{2a}x$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

3. Donc $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

4. on pose $b^2-4ac = \Delta$

Si $\Delta < 0$ alors $(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = k$ **est** strictement positif comme somme de 2 expressions positives

Et comme $ax^2+bx+c = ak$ le polynôme n'est jamais nul, quel que soit x il est du signe de a.

si $\Delta \geq 0$ on peut écrire que $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2$

$ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$ et on peut factoriser la différence de carrés

Le polynôme peut s'écrire comme un produit de facteurs du 1er degré $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

Le polynôme d'annule pour $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et pour** $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ces nombres sont les **racines** du polynôme.

On va rapidement oublier les calculs qui précèdent pour ne retenir que ce qui suit.

Soit un polynôme du second degré ax^2+bx+c, on peut toujours calculer son discriminant $\Delta = b^2-4ac$

Si Δ est négatif	Si Δ est nul	Si Δ est positif
Le polynôme n'a pas de racine	Le polynôme a une racine dite double $x' = \frac{-b}{2a}$	Le polynôme a 2 racines $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
On ne peut pas factoriser le polynôme	On peut factoriser le polynôme $ax^2+bx+c=a(x-x')^2$	On peut factoriser le polynôme $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$
Quel que soit x le polynôme n'est jamais nul. Il est toujours du signe de a	Le polynôme est nul pour x=x'. Sinon il est du signe de a.	Le polynôme est nul pour x=x' et x=x". Il est du signe de –a pour x entre x' et x" Il est du signe de a pour x extérieur aux racines.

Résoudre une équation du second degré

$3x^2+2x+1 = 2x^2-3x+7$ → on transforme l'équation en $x^2+5x-6 = 0$ les racines du polynôme sont les solutions.

Polynômes pour lesquels il est inutile de calculer le discriminant.

Polynômes du type $3x^2+8$ ou $-3x^2-8$ Sommes de deux termes de même signe. Jamais nul. Pas de racine. Pas de factorisation.
Polynômes du type $3x^2-8$ ou $-3x^2+8$. On les considère comme une différence de carré. Factorisation immédiate.2 racines.
Polynômes du type $a(x^2 \pm 2cx + c^2)$ On reconnaît $a(x+c)^2$ ou $a(x-c)^2$. Factorisation immédiate. Racine double.
Polynômes ax^2+bx. On met ax (ou x) en facteur $ax(x+\frac{b}{a})$. Factorisation immédiate. x'=0, $x''=-\frac{b}{a}$

Somme et produits des racines de ax^2+bx+c (avec $\Delta \geq 0$).

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$P = x'x'' = \frac{c}{a}$$

Conséquence quand le polynôme a **une racine évidente, 1 ou –1 on trouve facilement l'autre**:

Si x'=1 alors $x''=\frac{c}{a}$. Si x'= –1 alors $x''=-\frac{c}{a}$

Exemple $3x^2+4x-7$. On remarque que 3+4–7 = 0 donc x'=1 est une racine évidente et $x''=\frac{c}{a} = -\frac{7}{3}$

Si on divise ou on multiplie un polynôme par un nombre, on ne change pas ses racines.

Or si on divise ax^2+bx+c par a on trouve $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$. Autrement dit $x^2 - Sx + P$

Application: Trouver deux nombres a et b tels que **a + b =5** et **ab = 6** .

a et b sont les racines de $x^2 - 5x + 6$, $\Delta = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$ **et donc** $a = \frac{5+1}{2} = 3$ **et** $b = \frac{5-1}{2} = 2$.

Inéquations du second degré

Elles sont de la forme **$3x^2+2x+1 < 2x^2-3x+7$**
On regroupe tous les termes dans le premier membre : **$x^2+5x–6 < 0$**
Et on sait étudier le signe d'un polynôme du second degré.
On calcule son discriminant Δ

S'il est négatif **$x^2+5x–6$** est toujours du signe de a (ici positif)
S'il est nul **$x^2+5x–6$** est du signe de a (positif) ou nul seulement quand x = $-\frac{b}{2a}$(racine double)
S'il est positif, comme ici, on calcule les 2 racines (1 et –6) et
Soit on écrit **$x^2+5x–6=(x–1)(x+6)$** et on étudie et on combine les signes des 2 facteurs dans un tableau.
Soit on dit que **$x^2+5x–6$** est du signe de –a (≤0) sur [–6; 1] et du signe de a (>0) en dehors]-∞ ;–6[U]1;+∞[

Fractions rationnelles

On appelle "fraction rationnelle" une fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P(x) et Q(x) sont des polynômes en x.
On se bornera ici à l'étude des cas où P(x) et Q(x) sont de degré inférieur ou égal à 2 ou peuvent être transformés en un produit de facteurs strictement de degré inférieur ou égal à 2.
Exemples : $\frac{2}{x}$, $\frac{-3}{5-x}$, $\frac{x+2}{2x+3}$, $\frac{9x^2-5x-4}{2x+3}$, $-\frac{(5x+2)(4-x)}{x^2+5x-6}$, $\frac{(x+3)(x-2)(2x+1)}{(5x+3)(x+1)}$ (ici P(x) de degré 3 mais produit de facteurs de degré 1)

Ce qu'il faut savoir:

1. On a généralement intérêt à factoriser P(x) et Q(x) pour étudier une fraction rationnelle.

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ n'est pas définie pour les valeurs de x qui annulent Q(x). On commence par les chercher.
$-\frac{(5x+2)(4-x)}{x^2+5x-6} = -\frac{(5x+2)(4-x)}{(x-1)(x+6)}$ n'est pas définie pour x=1 et x = – 6.

3. Si P(x) et Q(x) comportent un facteur commun au numérateur et au dénominateur on ne peut simplifier la fraction que si ce facteur n'est pas nul puisque s'il est nul, le dénominateur est nul et $\frac{p(x)}{q(x)}$ n'est pas définie.
$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x+2}{x+5}$ seulement si (x+1) est différent de 0 autrement dit, si x est différent de –1.
De même si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$ on n'a le droit d'écrire que P(x)S(x) = Q(x)R(x) que si Q(x)≠0 et S(x)≠0

4. $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ si et seulement si P(x) = 0
$\frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = 0$ si et seulement si (x+1)(x–1)=0 autrement dit si x= –1 ou x =+1.

5. Pour étudier le signe de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on étudie séparément les signes de P(x) et de Q(x) en fonction de x et on les compare dans un tableau.
Il est souvent plus simple de factoriser tout ce qui peut l'être et de comparer les signes de tous les facteurs dans un tableau.
On n'oublie pas la double barre d'indétermination sous les valeurs de x qui annulent Q(x).

6. Pour résoudre une inéquation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} < k$ il faut étudier le signe de Q(x) pour savoir si l'on peut écrire P(x) < k.Q(x) (cas où Q(x) est positif) ou P(x) > k.Q(x) (cas où Q(x) est négatif).
Exemple $\frac{3x+1}{x+1} < 2$ La fraction rationnelle n'est pas définie pour x = –1.
Si x+1> 0 autrement dit **x > -1** on a 3x+1 < 2(x+1) ou 3x+1 < 2x+2 ou **x < 1**
Comparons x > –1 et x <1. On en déduit que **x** ∈ **]–1 ; 1 [** est une partie de la solution
Si x+1< 0 autrement dit **x < -1** on a 3x+1 > 2(x+1) ou 3x+1 > 2x+2 ou **x > 1**
Comparons la condition x < –1 et la solution x > 1. Elles sont incompatibles.
En conclusion la solution est **x** ∈ **]–1 ; 1 [**