Techniques de base

Table des matières

Techniques calculatoires acquises

A la fin de la seconde on est sensé maîtriser:

Certaines conventions d'écriture

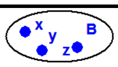
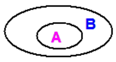
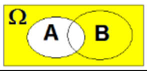
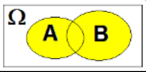
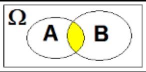
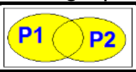
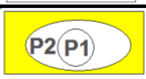
Notamment les conventions les plus courantes liées à la théorie des ensembles
On n'utilise plus le signe x mais des parenthèses pour séparer les facteurs dans les produits.

Les techniques de développement, de factorisation, de réduction des expressions algébriques.
La résolution des équations et inéquations du premier degré de toutes formes.
La résolution des équations et inéquations du second degré (premier stade).
La résolution des systèmes d'équations du premier degré à n inconnues ($n \leq 3$ en principe)
L'étude du domaine de définition, des racines et du signe d'une fraction rationnelle.

En cas de problème, revoir le chapitre "outils de base" de la classe de seconde.

Un peu de logique

Vocabulaire, concepts, convention d'écriture.

Ensemble	{ x; y; z }	Collection d'éléments, finie ou infinie, possédant une propriété donnée
Cardinal de E	Card(E)	Nombre d'éléments de E quand on peut les compter
Ensemble vide	$\emptyset$	ne contenant aucun élément
Appartenance	$\in$ ou $\notin$	 x appartient à B → x est un élément de l'ensemble B $x \in B$ (x est un élément, B un ensemble)
inclusion	$\subset$ ou $\subseteq$	 A inclus dans B si tout élément de A appartient à B $A \subseteq B$ (A et B sont des ensembles)
Univers	Ω	Ensemble contenant tous les autres
Complémentaire	$\Omega - A$ $\bar{A}$	 Complémentaire de A dans Ω = Ω privé des éléments de A Plus simplement on peut noter $\bar{A}$ (non A) le complémentaire de A.
Réunion	U	 A union B ensemble des éléments de A ou de B Réunion de A et de B $A \cup B$
Intersection	$\cap$	 A inter B ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B . intersection de A et de B $A \cap B$
quel que soit	$\forall$	Quel que soit x , élément de A … Tout x , élément de A … $\forall x, \in A$
il existe	$\exists$ ou $\nexists$	Il existe x, élément de A tel que … $\exists x \in A$ tel que …. Peut s'écrire $\exists x \in A \mid$ (la barre verticale remplace "tel que")
nécessaire	condition obligatoire, indispensable	
suffisant	condition minimale devant être vérifiée	
hypothèse	supposition, conjecture à vérifier ou admise comme vraie	
axiome	hypothèse de départ admise comme vraie sans qu'il soit possible de la démontrer	
proposition	P	un ensemble E ou un élément x vérifie une propriété P (x pair)
négation	non P $\bar{P}$	un ensemble $C_\Omega E$ ($\bar{E}$) ou un élément y ne vérifie pas la propriété P (y non pair)
propriété	Proposition vraie (les nombres dont le dernier chiffre est pair sont pairs)	
condition	proposition dont la vérification constitue un préalable à la vérification d'une autre proposition. si ………. alors ... " Si f(x)=f(-x) alors le graphe de f(x) est symétrique par rapport à l'axe des y"	
Ou	P_1 ou P_2	 P_1 ou P_2 vraie si au moins une proposition est vérifiée. Ensemble vérifiant P1 ou P2 = réunion des ensembles
Et	P_1 et P_2	 P1 et P2 vraie si les deux propositions sont vraies. Ensemble vérifiant P1 et P2 = intersection des ensembles
implication	$P_1 \Longrightarrow P_2$	 P1 implique P2 P1 = "x est pair", P2 =" x^2 est pair", P1 $\Rightarrow$ P2 vrai Posséder la propriété P1 conduit à posséder la propriété P2
Réciproque	$P_2 \Longrightarrow P_1$	La réciproque de $P_1 \Longrightarrow P_2$ est $P_2 \Longrightarrow P_1$. **$x=2 \Rightarrow x^2=4$** vraie mais pas **$x^2=4 \Rightarrow x=2$**. Réciproque de si P1 alors P2 est si P2 alors P1. "si x^2 est pair alors x est pair".
équivalence	$P_1 \Leftrightarrow P_2$	 P1 implique P2 et P2 implique P1 donc P1 équivalente à P2. Les ensembles vérifiant les propriétés P1 et P2 sont les mêmes.
Contraposée	$\overline{P2} \Rightarrow \overline{P1}$	  Non P2 $\Rightarrow$ Non P1 vrai équivalent à P1 $\Rightarrow$ P2 vrai. Si P1 $\subset$ P2 alors $C_\Omega P2 \subset C_\Omega P1$

Raisonnement déductif : suite d'implications "on a … donc ….."
Raisonnement par équivalence: transformation de l'énoncé d'un problème en énoncé plus simple équivalent.
"4x+3=2x+9 équivalent à 2x = 6 équivalent à x = 3"
Raisonnement par l'absurde: On suppose la proposition fausse et on démontre que c'est impossible.
"Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible avec p et q entiers, en élevant cette égalité au carré, on démontre que p et q sont divisibles par 2, donc que la fonction peut être réduite. On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel".
Raisonnement par disjonction de cas: On partitionne la population à étudier en 2 sous-ensembles (par exemple entiers pairs, entiers impairs) et on démontre que la proposition est vraie dans chaque sous ensemble.
Raisonnement par contraposition: on démontre non B implique non A pour démontrer A implique B.
Raisonnement par contre-exemple: pour démontrer qu'une proposition est fausse on donne un contre-exemple.
"f(x) = x^2 +2x -3 n'est pas positif pour tout x réel puisque f(0) = -3".

Polynômes et fonctions rationnelles

Généralités $5X^3–4X^2+7$ ou $3X^2+2X+1$ sont des polynômes en X. (On peut remplacer **7** par $7X^0$ et **1** par X^0)
Chaque terme de la forme KX^P est appelé **terme de degré P** et **K** est son **coefficient**.
Un polynôme en X est une somme de termes dans lesquels le degré de X varie de N à 0 (N **degré du polynôme**)
La valeur d'un polynôme est fonction de X. P : X → P(X), est appelée « **fonction polynôme** ».
On appelle **racines du polynôme** les solutions de P(X) = 0 (si elles existent).

Polynômes du second degré
Un polynôme de degré 2 revêt la forme générale $P(X) = aX^2+bX+c$ avec le coefficient $a \neq 0$.
Toute équation de degré 2 peut (et doit) être ramenée à la forme P(X) = 0 avec P(X) polynôme de degré 2.
Toute inéquation de degré 2 peut être ramenée à la forme P(X) < 0 (ou ≤) ou P(X)>0 (ou ≥) (Donc à l'étude du signe de P(X)).

Soit un polynôme de degré 2 $P(X) = aX^2+bX+c$ $\Delta = b^2 – 4ac$ est appelé discriminant de P.
Si Δ > 0 le polynôme a 2 racines $X1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si Δ = 0 le polynôme a une racine unique dite racine double $X1 = \frac{-b}{2a}$ (faire Δ = 0 dans le cas précédent)

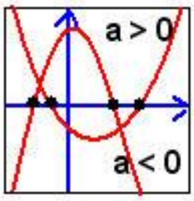
Si Δ < 0 le polynôme n'a pas de racine (par exemple $2X^2 +3$ est toujours ≥ 3)

Somme et produits des racines
Lorsqu'il existe 2 racines leur somme **S**$= X_1 + X_2 = \frac{-b}{a}$, leur produit **P** $=X_1.X_2 = \frac{c}{a}$.
Si on détecte qu'à l'évidence $X_1 = 1$, on en déduit que X_2 = **P** =c/a et si à l'évidence $X_1 = –1$ alors $X_2 = – c/a$
Si on divise $aX^2 + bX + c = 0$ par a, on obtient une équation X^2 –**S**X +**P**= 0 dont les racines sont les mêmes.
Si on connaît la somme **S** et le produit **P** de 2 nombres, ces 2 nombres sont racines de l'équation X^2 –**S**X +**P**= 0.

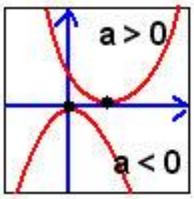
Factoriser un polynôme
Un polynôme ayant 2 racines X_1 et X_2 est factorisable sous la forme $\mathbf{a(X–X_1)(X-X_2)}$ $3X^2+3X–6 = 3(X–1)(X+2)$
Un polynôme ayant une racine double X_1 est factorisable sous la forme $\mathbf{a(X–X_1)^2}$ $2X^2+4X+2 = 2(X+1)^2$
Un polynôme n'ayant pas de racine n'est pas factorisable $–X^2 – 1$ ne peut être factorisé.

Plus généralement si un polynôme de degré quelconque P(X) admet pour racine X_1, c'est-à-dire si $P(X_1) =0$ alors P(X) peut être factorisé sous la forme $P(X) = (X–X_1)\,Q(X)$,
Q(X) étant un polynôme dont le degré est inférieur de 1 à celui de P(X).
On obtient les coefficients de Q(X) par identification de ceux de P(X) et de $(X–X_1)\,Q(X)$.

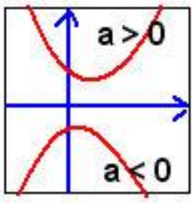
Etudier le signe d'un polynôme revient à résoudre une inéquation P(X) > 0 (ou P(X) <0).
Pour un polynôme de degré 2, il suffit de le factoriser et de comparer le signe des facteurs dans un tableau.
Le graphe de la fonction polynôme de degré 2 est une courbe appelée **parabole** dont l'illustration ci-dessous montre l'apparence selon le nombre des racines et le signe du coefficient **a.**
L'abscisse du sommet S de la parabole est $X_S = \frac{X_1+X_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Son ordonnée est $Y_S=P(X_S)$.
On voit très bien que le signe de P(X) ne varie que lorsque P(X) a 2 racines et dans ce cas P(X) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de – a entre les racines.



2 racines



1 racine



0 racine

Fraction rationnelle: C'est un quotient de polynômes $R(X) = \frac{N(x)}{D(x)}$ par exemple $R(X) = \frac{2X^2+3X-5}{X+3}$

La fonction R : X → R(X) est appelée **fonction rationnelle**.

R(X) n'est définie que si son dénominateur n'est pas nul. R(X) n'est pas définie pour X racine de D(X) .

R(X) est nulle pour les valeurs de X qui annulent le numérateur.

Pour étudier le signe de R(X) , il suffit de factoriser N(X) et D(X) et de comparer le signe de tous les facteurs dans un tableau. Si N(X) et D(X) comportent un facteur commun, on n'a le droit de simplifier que si ce facteur n'est pas nul.

Valeurs absolues

Toute la difficulté des problèmes comportant des valeurs absolues est de respecter la définition de la valeur absolue qui est:

|f(x) | = f(x) si f(x) ≥ 0 et **|f(x) | = – f(x) si f(x) ≤ 0**.

Notez qu'une valeur absolue a (en général) **<u>2 déterminations possibles</u>** sans valeur absolue…
Et que ces déterminations changent selon <u>le signe de f(x)</u> et non pas selon le signe de x. Mais <u>le signe de f(x)</u> varie, en général, en fonction de <u>la valeur de x</u>.

- **Par exemple:**

|3X–15| = 3X–15 (1ere détermination) si 3X–15 ≥ 0 c'est-à-dire si 3X ≥ 15 c'est-à-dire **si X≥ 3**

et donc **|3X–15| = –3X +15 (2^{e} détermination) si X ≤ 3 .**
ce que l'on peut exprimer dans un tableau montrant la détermination de |3x–15| en fonction de la valeur de X.

- **Autre exemple:** $|2X^2 + 6X – 8|$.

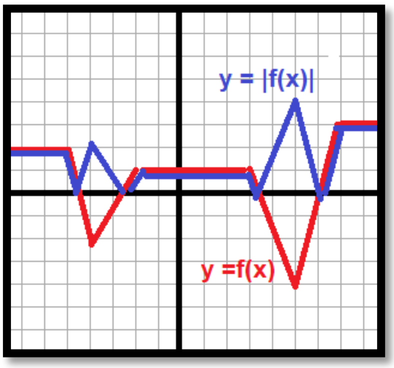
Les racines du polynôme du second degré sont +1 et –4. Son signe est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Ce qui donne :

$|2X^2 + 6X – 8| = – 2X^2 – 6X + 8$ si x ∊ [–4 ; + 1]

et **$|2X^2 + 6X – 8| = 2X^2 + 6X – 8$ si X ∊ (–∞ , –4] U [+1 ; + ∞)**
Et l'on peut encore utiliser un tableau pour montrer comment varie la détermination de la valeur absolue en fonction de la valeur de X.

Pourquoi utiliser un tableau pour illustrer cet aspect du problème ?
Supposons que la question soit : résoudre **$|3X–15| = |2X^2 + 6X – 8|$.** Nous ne savons répondre à la question qu'après avoir fait disparaître la double barre qui symbolise les valeurs absolues et la nature de l'équation va changer selon la détermination des valeurs absolues, autant dire selon la valeur de X. Un tableau va nous permettre d'y voir plus clair.
Appelons E notre équation.

valeur de X	–∞	**- 4**	**1**	**5** +∞
|3X–15|	**–3X + 15**	**–3X+15**	**–3X + 15**	**3X – 15**
$\|2X^2 + 6X – 8\|$	**$2X^2 + 6X – 8$**	**$–2X^2– 6X+8$**	**$2X^2 +6X - 8$**	**$2X^2 +6X - 8$**
E devient	$-3X+15= 2X^2 + 6X – 8$ **$2X^2+9X-23 = 0$**	$-3X+15=–2X^2– 6X+ 8$ **$2X^2+3X+7 = 0$**	$-3X+15= 2X^2 + 6X – 8$ **$2X^2+9X-23 = 0$**	$3X-15=2X^2 + 6X – 8$ **$2X^2+3X+7 = 0$**
Solutions	On calcule les solutions de E débarrassée des valeurs absolues colonne par colonne (si elles existent) et l'on ne retient que celles qui figurent dans le domaine de X où l'équation résultante est en vigueur. Par exemple, dans la colonne (–∞ , – 4] on ne retient que les solutions situées entre –∞ et – 4.			



Comparaison du graphe de f(x) (en bleu) **et de | f(x) |** (en rouge).
Les parties négatives de f(x) sont « redressées » en – f(x) de sorte que le graphe de |f(x)| ne comporte pas de partie négative.
Si f(x) est toujours positive (par exemple si $f(x) = 3x^2+1$), les deux graphes coïncident.
Le graphe de f(x)=|x| est formé de 2 demi droites formant un V dont la pointe occupe l'origine. La branche de droite correspond à f(x)=x et celle de gauche à f(x) = - x.
(|x|= - x si x≤0)

- Remarquons que g(x)= $\sqrt{[f(x)]^2}$ = |f(x)| et non f(x) car g(x) existe même si f(x) est négative et en tant que racine g(x) est positive (ou nulle) par définition. Pour écrire g(x) = f(x), il faudrait que f(x) soit toujours positive et ce n'est peut-être pas le cas. Ecrire g(x)=|f(x)| couvre tous les cas de figures.

- Parfois on trouve des fonctions telles que $\frac{|x|}{x} f(x)$

Le facteur $\frac{|x|}{x}$ présente la particularité d'être égal à 1 si x > 0 et à –1 si x <0. Il n'est pas défini pour x = 0. le graphe de cette fonction est celui de f(x) pour x >0 et celui de –f(x) pour x <0. Avec un « trou » pour x = 0. Si, dans la fraction, on remplace x par x + k, on fait varier le domaine pour lequel la fonction est égale à f(x) ou –f(x).