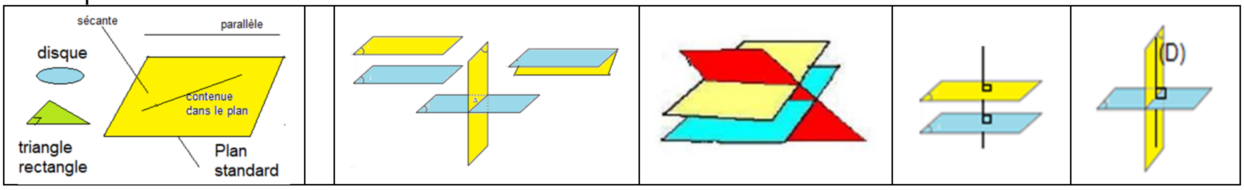
Géométrie dans l'espace

Table des matières

Rappels de classe de seconde

En classe de seconde nous avons appris quelques rudiments de dessin en perspective permettant de représenter solides, plans et droites dans l'espace, et quelques propriétés permettant de les définir ou de caractériser certaines configurations particulières.



Propriétés fondamentales des plans

- Si 2 points A et B appartiennent au plan (P) alors tous les points de la droite (AB) appartiennent à (P).
- 2 droites distinctes d'un plan sont soit sécantes, soit parallèles.
- Le seul plan inclus dans (P) est (P) lui-même.

Plan de 2 droites sécantes ou parallèles

Soient 2 droites (D1) et (D2) **sécantes** ou **parallèles**.

■On définit le plan de (D1) et (D2) comme l'ensemble des points composant toutes les droites (AB) s'appuyant sur (D1) et (D2), c'est-à-dire telles que A∈(D1) et B∈(D2).

■Soient (D3) et (D4) 2 droites distinctes de ce plan. Le plan de (D3) et D(4) est le plan de (D1) et D2).

■ Le plan de (D1) et (D2) est le seul plan contenant (D1) et D2).

Définition vectorielle du plan Soient 2 droites (D1) et (D2) **sécantes** en **O**.

Soit $\vec{\imath}$ un vecteur directeur de (D1) et $\vec{\jmath}$ un vecteur directeur de (D2).

On peut définir le plan de (D1) et (D2) comme l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec x∈ℝ et y∈ℝ

Plan de 3 points

Il existe un plan et un seul contenant 3 points non alignés A, B, C.

Donc 3 points non alignés définissent un plan unique qui est celui du triangle (ABC)

Plus de 3 points ou plus d'une droite sont dits "**coplanaires**" quand ils appartiennent à un même plan.

Intersection de plans Lorsque 2 plans (P1) et (P2) non confondus se coupent, leur intersection est une droite.

Parallélisme

Droite // droite Une droite (D) peut être parallèle à un plan (P) si (D)∩(P) =∅ ,
sécante à un plan si (D)∩(P) = un point unique
ou contenue dans un plan si (D)∩(P) = (D)

■ 2 droites peuvent ne pas se couper sans être parallèles.

■ 2 droites sont parallèles si elles ne se coupent pas et si elles sont coplanaires.

■ Par contre 3 droites ou plus peuvent être parallèles sans être toutes dans le même plan (par exemple les 4 arêtes parallèles d'un cube).

Droite // plan et plan// plan ■ Par un point extérieur au plan, on peut mener plusieurs droites parallèles à un plan. Par exemple (d2),(d3) à partir du point Q.

■ Pour qu'un plan (P') soit parallèle à un plan (P), il suffit qu'il contienne 2 droites sécantes parallèles à (P)

■ 2 droites distinctes parallèles à une même 3^{e} sont parallèles entre elles.

■ Théorème du toit :

Soient (D) et (D') 2 droites parallèles. Soit (P) un plan contenant (D) et (P') un plan contenant (D').
Si (P) et (P') distincts, se coupent, leur droite d'intersection (Δ) est parallèle à (D) et à D').

■ 2 plans (P') et (P'') distincts parallèles à un même 3^{e} (P) sont parallèles entre eux.

Soient 2 plans parallèles (P) et (P')

■ Toute droite (D) qui coupe (P) coupe (P')

■ Si un plan (P'') coupe (P) selon une droite (D) , il coupe (P') selon une droite (D') parallèle à (D).

Orthogonalité

Une droite (D) est orthogonale à un plan quand elle coupe ce plan en un point H et que toutes les droites du plan passant par H sont perpendiculaires à (D).

Une droite (D) est dite orthogonale à une autre droite (d) s'il existe un plan passant par (d) orthogonal à (D).

Ou si une parallèle à (D) menée par un point de (d) est perpendiculaire à

Il suffit qu'un plan contienne 2 droites sécantes orthogonales à (D) pour qu'il soit orthogonal à (D).

■ 2 droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.

■Si 2 plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Le plan (P') est orthogonal au plan (P) si (P') contient une droite (D) orthogonale à (P).

■ Si 2 plans sont parallèles, tout plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.

Espace affine, espace vectoriel

Rappels sur la colinéarité

$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ s'il existe une réel k (éventuellement nul) tel que $\vec{u}$=k$\vec{v}$ ou $\vec{v}$=k $\vec{u}$

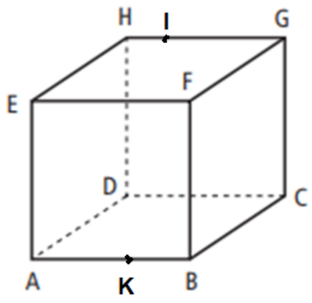
$\vec{u}$ est un vecteur unitaire de la droite (AB) si $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Soient 4 points distincts A,B,C,D → (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

→ A,B,C alignés si et seulement si 2 des vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Faire la différence entre droite ou plan vectoriel et droite ou plan affine.

Le plan et la droite, les ensembles de points qui nous sont habituels seront désormais qualifiés d' "affines" pour les distinguer du plan vectoriel et de la droite vectorielle qui sont des ensembles de vecteurs.



Droite vectorielle : La droite vectorielle de base { $\vec{u}$} est l'ensemble des vecteurs qu'on peut écrire sous la forme x$\vec{u}$, x étant un réel quelconque.
La droite vectorielle de base {$\overrightarrow{AB}$} est l'ensemble de tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.
Sur la figure ci-contre $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AK}$ ….(ainsi que leurs opposés et tous les vecteurs de même direction) appartiennent à cette droite vectorielle.
Les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{FG}$ forment une autre droite vectorielle.

Droite affine : La droite (AB) est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{AP}$=x$\overrightarrow{AB}$.
Les points alignés avec A et B forment la droite (AB).
Les points alignés avec H et G forment une droite affine différente.
On définit une droite affine en donnant un point par lequel elle passe et un vecteur directeur: la droite. (P,$\vec{u}$) = Ensemble des points M tels que PM=x$\vec{u}$ avec x∈ℝ .

Plan vectoriel: Le plan vectoriel ($\vec{u}, \vec{v}$)est l'ensemble des vecteurs x$\vec{u} + y\vec{v}$ avec (x,y)∈$\mathbb{R}^2$. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, le plan vectoriel de base {$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$} est l'ensemble des vecteurs qu'on peut écrire x$\overrightarrow{AB}$ + y$\overrightarrow{BC}$, x et y étant 2 réels quelconques.
Donc non seulement tous les vecteurs du plan (ABC) appartiennent à ce plan vectoriel mais aussi tous les vecteurs d'une infinité de plans parallèles à (ABC) comme (EFG)
Le plan vectoriel de base { $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$}, contient $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$ mais aussi $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{GI}$,etc.. Il ne contient pas $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{HD}$, etc.

Plan affine: Le plan de 2 droites concourantes (AB) et (BC) est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{AP}$ = x$\overrightarrow{AB}$ + y$\overrightarrow{AC}$, x et y étant 2 réels quelconques.
C'est le plan (ABC), différent de ceux qui forment les autres faces planes du cube.
On définit un plan affine en donnant un point par lequel il passe O et deux vecteurs non colinéaires {$\vec{u}$, $\vec{v}$} . (P) = ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}$=x$\vec{u}$ +y$\vec{v}$ avec x,y∈$\mathbb{R}^2$

$\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{w}$ appartiennent au même plan vectoriel si et seulement si les points O,A,B,C tels que $\overrightarrow{OA}$ =$\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}$=$\vec{v}$, et $\overrightarrow{OC}$=$\vec{w}$ sont dans le même plan affine (sont coplanaires) .

Inversement A, B, C, D sont dans le même plan affine (sont coplanaires) s'il existe 2 réels x, y tels que $\overrightarrow{AD}$=x$\overrightarrow{AB}$+y$\overrightarrow{AC}$ (ou $\overrightarrow{BC}$=x$\overrightarrow{BA}$+y$\overrightarrow{BD}$ par exemple)

Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts de la même droite vectorielle,

Soient A et B, 2 points distincts de l'espace, tels que $\overrightarrow{AB}$ ne soit pas colinéaire à $\vec{u}$

La droite vectorielle de base {$\vec{u}$} est la même que la droite vectorielle de base {$\vec{v}$}

La droite affine (A,$\vec{u}$) est parallèle à la droite affine (B,$\vec{v}$) confondue avec (B,$\vec{u}$)

Soient 4 vecteurs $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires 2 à 2 du même plan vectoriel,

Le plan vectoriel de base {$\vec{s}$, $\vec{t}$ } est le même que le plan vectoriel de base{ $\vec{u}$, $\vec{v}$ }

Le plan affine (A, $\vec{s}$, $\vec{t}$) est parallèle au plan affine (B, $\vec{s}$, $\vec{t}$) lui-même confondu avec le plan affine (B, $\vec{u}$, $\vec{v}$)

Dimension d'un espace vectoriel

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre des vecteurs qui forment une de ses bases.

La base d'une droite vectorielle est formée d'un vecteur unique {$\vec{u}$}.
Cela signifie que tout vecteur de cette droite vectorielle peut être exprimé sous la forme x$\vec{u}$ avec x ∈ ℝ .

La droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

La base d'un plan vectoriel est formée de 2 vecteurs non colinéaires {$\vec{u}$,$\vec{v}$}.
Cela signifie que tout vecteur de ce plan vectoriel peut être exprimé sous la forme x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$ avec (x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$.

Le plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

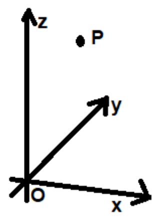
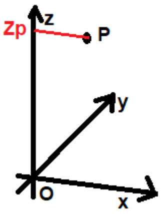
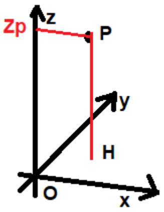
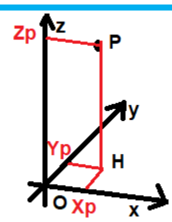
Plutôt que dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **non colinéaires**, on dira qu'ils sont **linéairement indépendants** ce qui signifie qu'une combinaison linéaire de ces deux vecteurs x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$ avec (x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$ ne pourra être nulle que si x et y =0.
Plus généralement n vecteurs sont linéairement indépendants si $x_1\overrightarrow{u1} + x_2\overrightarrow{u2} + \ldots + x_n\overrightarrow{un} = \vec{0}$ équivaut à tous les x_i=0.

Quand n vecteurs sont linéairement indépendants, on ne peut exprimer l'un d'eux en fonction des n–1 autres.

Dans un espace de dimension 3

$\{\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k}\ \}$ est une base d'un espace vectoriel de dimension 3 si les 3 vecteurs sont linéairement indépendants. Autrement dit si aucun des vecteurs n'appartient au plan vectoriel des 2 autres.

Dans une base $\{\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k}\ \}$, tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace peut s'écrire de façon unique $\vec{v}$ = x$\vec{\imath}$ +y$\vec{\jmath}$ +z$\vec{k}$.
Les réels (x,y,z) sont les coordonnées du vecteur dans cette base.
(O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) constitue un repère de l'espace.
Soit un point M quelconque de l'espace rapporté à ce repère.
Les coordonnées (x,y,z) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont les coordonnées du point M.
(On les appelle respectivement "abscisse x", "ordonnée y" et "côte z")

			
Pour lire les coordonnées (Xp, Yp, Zp) de P sur les axes du repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$)	On projette P sur Oz parallèlement au plan (xOy) la côte de la projection nous donne Zp.	On projette P sur le plan (xOy) parallèlement à Oz on obtient un point H de coordonnées (Xp,Yp,0)	On projette H sur Ox parallèlement à Oy on obtient Xp, puis sur Oy parallèlement à Ox on obtient Yp.

Projections Dans un repère du plan affine, les projections se font sur un axe parallèlement à l'autre axe.
Dans un repère de l'espace à 3 dimensions, si M est un point, (P) un plan et (D) une droite non incluse dans (P):
Projection de M sur (D) parallèlement au plan (P) = intersection de (D) et du plan parallèle à (P) passant par M.
Projection de M sur le plan (P) parallèlement à (D) = intersection de (P) et de la droite passant par M parallèle à (D)
Projection d'un segment [AB] ou d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur (D) ou (P). Si A' projeté de A et B' projeté de B, [A'B'] est le projeté de [AB] et $\overrightarrow{A'B'}$ est le projeté de $\overrightarrow{AB}$
Si la droite (D) est orthogonale au plan (P) on parle de projection orthogonale.

Règles de calcul vectoriel dans un espace vectoriel de dimension 3

Ce sont les mêmes qu'en dimension 2 sauf qu'ici on a 3 coordonnées au lieu de 2.

Dans un repère quelconque.

Somme de 2 vecteurs: (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x' , y+y' , z+z')
Produit d'un vecteur par un scalaire : λ(x,y,z) =(λx , λy, λz)
Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction des coordonnées de A et de B: (Xb-Xa, Yb-Ya, Zb-Za)
Coordonnées du milieu de [AB] = moyenne des coordonnées : $(\frac{Xa+Xb}{2}, \frac{Ya+Yb}{2}, \frac{Za+Zb}{2})$
Colinéarité de (x,y,z) et de (a,b,c) ∃λ∈ℝ tel que x=λa, y=λb, z=λc

Dans un repère orthonormé.

Distance entre 2 points ou norme d'un vecteur: $||\vec{v}||$ = ||(x,y,z)|| = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Produit scalaire: $\vec{u}.\vec{v}$

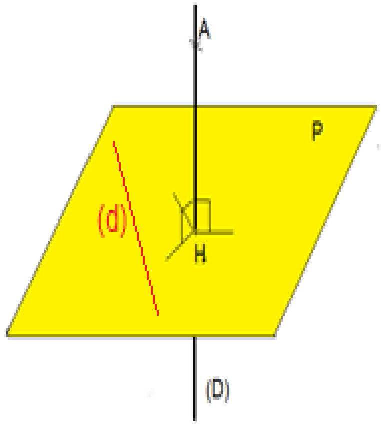
Si angle ($\vec{u}.\vec{v}$) = θ — $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\theta)$
Si $\vec{u}$ =(x,y,z) et $\vec{v}$ =(x', y', z') — $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy' + zz'
Si $\vec{u} = \overrightarrow{OA},\ \vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA) — $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ (=± OA.OH)
Si l'on ne connait que les normes

$\vec{u}.\vec{v}$ = ½ $[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2]$
$\vec{u}.\vec{v}$ = ½ $[||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2]$
$\vec{u}.\vec{v}$ = ¼ $[||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2$

Les propriétés du produit scalaire restent les mêmes
Commutativité $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
Linéarité et distributivité du produit sur la somme $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et (k $\overrightarrow{u)}.\vec{v}$ =k($\vec{u}.\vec{v}$)
Identités remarquables applicables.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}$ =0

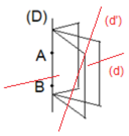
Orthogonalité (rappels)



Un cas particulier de droite sécante à un plan

Une droite (D) est **orthogonale** à un plan quand elle coupe ce plan en un point H et que toutes les droites du plan passant par H sont perpendiculaires à (D).

Une droite (D) est dite orthogonale à une autre droite (d) s'il existe un plan passant par (d) orthogonal à (D).
Ou si une parallèle à (D) menée par un point de (d) est perpendiculaire à



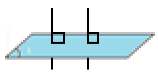
Ainsi toutes les droites du plan (P) de notre figure sont orthogonales à (D).
Parmi toutes ces droites, celles qui coupent (D) sont dites perpendiculaires à (D).
Sur la figure ci-contre on voit qu'il peut exister un plan passant par (D) et orthogonal à (d) mais aucun plan passant par (D) et orthogonal à (d').
Donc (D) est orthogonale à (d) mais pas à (d').

Il suffit qu'un plan (P) contienne 2 droites sécantes orthogonales à (D) (ou que le vecteur directeur de (D) soit orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de (P)) pour que (P) soit orthogonal à (D).

En effet , soient (D1) et (D2) les parallèles à ces sécantes en H. (D1) et (D2) sont ⊥ à (D).
Si (D1) et (D2) appartiennent au plan orthogonal en H à (D) le problème est résolu puisque le plan de (D1) et (D2) est le plan orthogonal à (D) en H.
Si par exemple (D1) n'appartient pas au plan orthogonal à (D) en H, le plan de (D) et (D1) coupe le plan orthogonal selon une droite (Δ) et les angles (D),(Δ) et (D),(D1) mesurant 90° les 3 droites étant dans le même plan, (D1) et (Δ) sont confondues ce qui est contraire aux hypothèses. En conclusion, le plan de (D1) et (D2) est le plan orthogonal à (D).

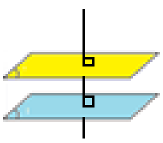
■ Si 2 droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une d'elles est orthogonale à l'autre.
■ Si 2 droites sont parallèles, toute orthogonale à l'une d'elles est orthogonale à l'autre.

■ 2 droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.



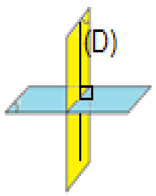
En effet si ces 2 droites (D) et (D') coupent le plan en H et H', Dans le plan de (D) et (D'), (HH') est perpendiculaire à (D) et à (D') et 2 droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

■Si 2 plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.



En effet, supposons que la droite (D) coupe les plans en H et H'. Soit (d) une droite de (P) passant par H. Elle est perpendiculaire à (D). Le plan des 2 droites (d) et (D) coupe (P') en (d'). (d') étant parallèle à (d) , (d') est perpendiculaire à (D) en H'.
Il suffit de recommencer avec une autre droite de (P) passant par H et le plan (P') contenant 2 droites perpendiculaires à (D), il est orthogonal à (D).

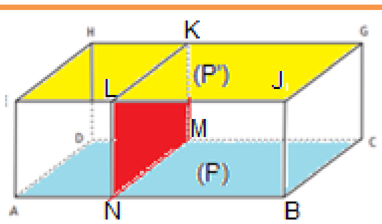
Plans orthogonaux



Le plan (P') est orthogonal au plan (P) si (P') contient une droite (D) orthogonale à (P).

Remarquons que tous les plans contenant (D) vérifient cette condition et donc
■ Tous les plans contenant une droite (D) orthogonale à (P) sont orthogonaux à (P).
■ (D) est perpendiculaire à Δ la droite d'intersection de (P) et (P').
■ (D) orthogonal à (P) et (P') orthogonal à toute droite perpendiculaire à Δ

■ Si 2 plans sont parallèles, tout plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.



Le plan (P") est orthogonal à (P) et (P) est // à (P'). (MN) = (P)" ∩ (P)
Soit (NL) orthogonale à (P). (NB) est une droite de (P) passant par N.
(LJ) est l'intersection du plan (LNB) avec (P'). (LK) =(P") ∩ (P').
Le parallélisme des plans et l'appartenance à un même plan implique (MN)//(LK) donc (LK) ⊥ (LN) et (NB) //(LJ) donc (LJ) ⊥ (LN).
Si 2 droites sécantes de (P') sont ⊥ à (LN) alors (P') ⊥ (LN) et donc à (P").

Equations de plans et de droites

Vecteur normal: Un vecteur normal à un plan où à une droite est un vecteur orthogonal à ce plan ou à cette droite.

Comment trouver un vecteur (x,y,z) orthogonal à un vecteur (a,b,c)?

Il faut et il suffit que le produit scalaire ax+by+cz = 0. Donc on peut prendre par exemple le vecteur (1,1,$-\frac{a+b}{c}$).

Mais attention, A étant un point connu, il existe une infinité de vecteur $\overrightarrow{AM}$ orthogonaux à (a,b,c) et non colinéaires.

Comment trouver un vecteur (x,y,z) normal au plan (P) des vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') ?

Il faut et il suffit que les 2 produits scalaires ax+by+cz et a'x+b'y+c'z soient nuls.
Il suffit de déclarer arbitrairement que (par exemple) z=1, puis de résoudre le système ax+by = - c et a'x+b'y =- c' .
Le vecteur (x,y,1) sera normal au plan. Par exemple (1, –2, 1) sera normal au plan de (1,2,3) et (4,5,6).
Cette fois, si A est un point connu, tous les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ orthogonaux au plan (P) seront colinéaires.

Préalables

Soit un point A dont on connait les coordonnées (Xa,Ya, Za) et 2 vecteurs $\vec{u}$ = (a,b,c) et $\vec{v}$ = (a',b',c') connus eux aussi.
Soit un point M quelconque de coordonnées (x,y,z) .
La droite (A,$\vec{u}$) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le plan (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est le plan passant par A et de plan directeur ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

Equation d'une droite

Quelles relations doivent vérifier (x,y,z) pour que le point M appartienne à la droite (A,$\vec{u}$)?

Si M appartient à **(A,$\vec{u}$)**, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires autrement dit ∃λ∈ℝ tel que (x–Xa)= λa , (y–Ya) = λb et (y–Za) = λc
On en déduit que les coordonnées x, y, z d'un point de la droite doivent vérifier les relations

$$\boxed{\begin{array}{l} x = Xa + \lambda a \\ y = Ya + \lambda b \\ z = Za + \lambda c \end{array}}$$

C'est ce qu'on appelle **l'équation paramétrique de la droite (A,$\vec{u}$)**
A chaque valeur du paramètre λ arbitraire, correspondent les coordonnées d'un point de la droite.

Equations d'un plan

Quelles relations doivent vérifier (x,y,z) pour que le point M appartienne au plan (A,$\vec{u}$,$\vec{v}$)?

Pour que M appartienne à ce plan, il faut et il suffit qu'il existe 2 réels λ et δ tels que $\overrightarrow{AM}$ =λ$\vec{u}$+δ$\vec{v}$.
Autrement dit (x–Xa)= λa+δa' , (y–Ya) = λb+δb' et (y–Za) = λc+δc'. Equations que l'on peut écrire

$$\boxed{\begin{array}{l} x = Xa + \lambda a+\delta a' \\ y = Ya + \lambda b+\delta b' \\ z = Za + \lambda c+\delta c' \end{array}}$$

C'est ce qu'on appelle **l'équation paramétrique du plan (A,$\vec{u}$,$\vec{v}$)**

Si $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal au plan (A,$\vec{u}$,$\vec{v}$), on peut également définir ce plan comme l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à $\vec{n}$. On peut également parler de plan (A,$\vec{n}$) où $\vec{n}$ est un vecteur normal.
Autrement dit si (x,y,z) sont les coordonnées de M, le plan**(A,$\vec{u}$,$\vec{v}$)** de vecteur normal (a,b,c) est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$ =0 ce qui équivaut à

$$\boxed{\begin{array}{l} a(x-Xa) + b(y-Ya) +c(z-Za) = 0 \\ \text{ou } ax + by +cz -(aXa+bYa+cZa) =0 \\ \text{ou } \mathbf{ax+by+cz +d = 0} \end{array}}$$

qui est **l'équation cartésienne du plan**
Remarquons que cette équation est équivalente à l'égalité de 2 produits scalaires :ax+by+cz = $\vec{n}\,.\overrightarrow{OM}$ et **–d = $\vec{n}\,.\overrightarrow{OA}$**
$\vec{n}\,.\overrightarrow{OM}$ = $\vec{n}\,.\overrightarrow{OA}$

Inversement si (a,b,c) ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points (x,y,z) vérifiant ce type d'équation est un plan de vecteur normal (a,b,c).

Equation cartésienne du plan passant par A (1,2,3) et de vecteur normal (4,5,6) :
4x + 5y, +6z –(4 + 10 + 18) = 0 où (4 + 10 + 18) est le produit scalaire $\vec{n}\,.\overrightarrow{OA}$

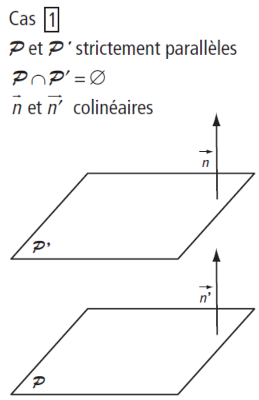
Remarques: si k est un réel non nul le plan (A,$\vec{n}$) est le même que le plan (A, k$\vec{n}$)
Donc ax+by+cz+d = 0 caractérise le même plan que kax +kby +kcz +kd = 0
Si d ≠ d' ax+by+cz+d' caractérise un plan parallèle au plan d'équation ax+by+cz+d =0

Plans de base dans un repère orthonormé

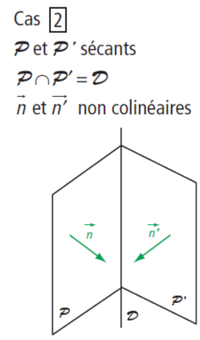
Le plan (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$) ou encore (xOy) admet $\vec{k}$ = (0,0,1) pour vecteur normal .
Son équation cartésienne est donc z – Zo = 0 et comme Zo = 0 ce plan est le plan z = 0.
De même les autres plans de base ont pour équation x = 0 (plan yOz) et y = 0 (plan xOz).

Intersection de 2 plans

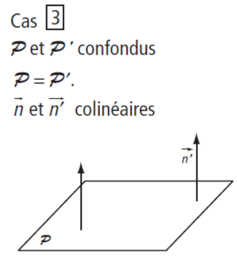
Soit un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ et d'équation ax+by+cz+d = 0 où (a,b,c) sont les coordonnées de $\vec{n}$
Soit un plan P' de vecteur normal $\vec{n'}$ et d'équation a'x+b'y+c'z+d' = 0 où (a',b',c') sont les coordonnées de $\vec{n'}$
Les3 figures ci-dessous nous renseignent sur l'existence d'une droite intersection P ∩ P'.
Il y a 2 possibilités: Soit le système **S** $\left.\begin{matrix} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' = 0 \end{matrix}\right\}$ a une infinité de solutions, soit il en a aucune



(a,b,c) et (a',b',c') proportionnelles mais pas d et d'.
Les plans sont strictement parallèles.
Le système S n'a pas de solution puisqu'il est équivalent à
Ax+By+Cz+D = 0
Ax+By+Cz+D' = 0 avec D≠D' et s'il existait une solution on aurait forcément .D=D'



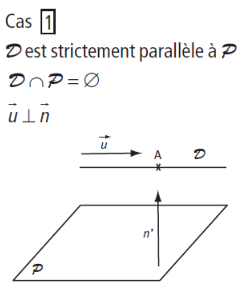
(a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnelles.
Le système S a pour solution l'ensemble des points (x,y,z) qui appartiennent à la droite d'intersection de P et P'.
Réciproquement
Tout système de type S où (a,b,c) est non proportionnelle à (a',b',c') caractérise une droite.

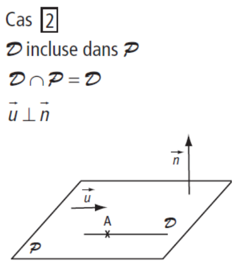


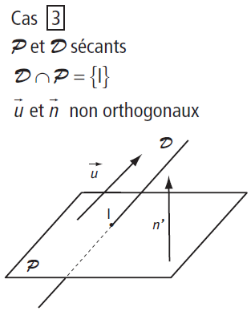
Ici (a,b,c,d) et (a'b'c',d') sont proportionnelles.
En fait il s'agit de la même équation donc du même plan.
Le système S a une infinité de solution puisque tous les points du plan le vérifient.

Intersection d'une droite et d'un plan

La droite D est caractérisée par l'un de ses points et un de ses vecteurs directeurs (A,$\vec{u}$).
Le plan P est caractérisé par l'un de ses points B et un de ses vecteurs normaux $\vec{n}$
$\vec{u}$ de coordonnées (a',b',c') $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c) P d'équation ax+by+cz + d = 0







On fait le produit scalaire $\vec{u}$. $\vec{n}$. Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ soit la droite D est // à P soit elle est incluse dans P.
Pour savoir dans quel cas on se trouve il suffit de voir si les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne de P (D incluse dans P) ou pas (D // P)

Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ est faux on peut affirmer que la droite coupe le plan en un point unique.
Pour trouver les coordonnées de ce point
Dans l'équation du plan ax + by + cz + d = 0 on remplace x, y , z par les coordonnées paramétriques des points de la droite x = Xa +λa', y = Ya +λb' , z = Za +λc'.
On obtient ainsi une équation qui permet de donner la valeur de λ pour le point D ∩ P et en reportant la valeur de λ dans l'équation paramétrique on a les coordonnées de ce point.

Certains dessins ont été empruntés au site public "l'Académie en ligne".