Géométrie

Table des matières

Vecteurs et droites

Cette partie du cours a, pour l'essentiel, été vue en classe de seconde.

En ce qui concerne les vecteurs.

Au besoin il faut se rapporter au domaine "vecteurs et repères" du cours de seconde pour retrouver les notions suivantes:

Dans un espace quelconque

Définition d'un vecteur (Direction, sens, norme).
Définition de l'égalité des 2 vecteurs.
Définition de la somme de 2 vecteurs
Définition de la multiplication par un scalaire. $\lambda\vec{V}$
Définition de la colinéarité de 2 vecteurs

Dans le plan rapporté à un repère quelconque

Coordonnées d'un vecteur
Egalité des coordonnées = égalité des vecteurs
Coordonnées de la somme de 2 vecteurs
Coordonnées de $\lambda\vec{V}$ en fonction de celles de $\vec{V}$
Test de colinéarité de $\vec{u}_{(x,y)}$ et $\vec{v}_{(x',y')}$ $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$ ou xy' =yx'
Coordonnées du milieu d'un segment.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

Calcul de la norme d'un vecteur ou de la distance AB

En ce qui concerne les droites rapportées à un repère.

Au besoin il faut se rapporter aux chapitres "fonctions affines" et "quelques problèmes sur la fonction affine" du domaine "fonctions" du cours de seconde pour y retrouver les notions suivantes:

Equation d'une droite rapportée à un repère définition du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.
Famille des fonctions affines. Cas particulier de la fonction linéaire et de la fonction constante.
Définition du vecteur directeur d'une droite comme un vecteur de même direction que la droite
Le vecteur directeur peut être donné…

Sous la forme privilégiée $\vec{u}$(1,a)→ a est le coefficient directeur de la droite y =ax+b

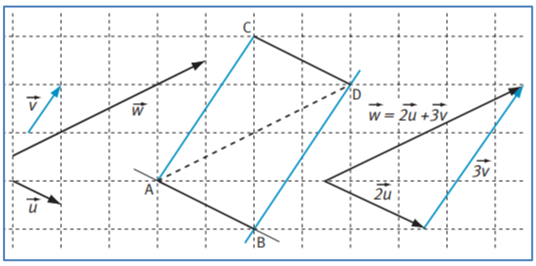
Sous la forme banale $\vec{u}$(a,b) → l'équation de la droite est de la forme 0 = bx – ay +c ou y = $\frac{b}{a}$ x + $\frac{c}{a}$

Si 2 droites ont des vecteurs directeurs colinéaires elles sont parallèles.
Si 2 droites ont même coefficient directeur elles sont parallèles.

On a également vu la technique de résolution de certains problèmes

A et B étant connus trouver l'équation de (AB)
Déterminer l'équation de la droite passant par A (connu) et parallèle à une droite y=ax+b (connue)
Déterminer l'équation de la droite passant par A (connu) et de vecteur directeur $\vec{u}$ connu.
Déterminer le point d'intersection de 2 droites.
Soit f(x) = ax + b. Pour quelles valeurs de x a-t-on f(x) > 0 ou f(x) > k.

Complément: Décomposition d'un vecteur du plan.

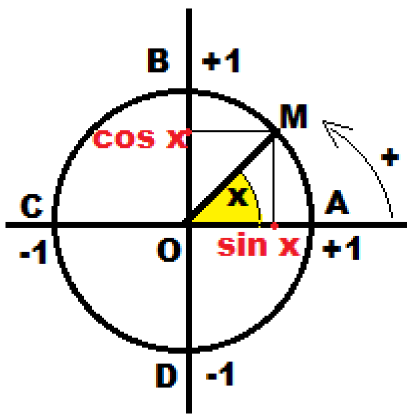


Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs non colinéaires du plan;
et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ un vecteur du plan.
Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont parallèles ∃ x∈ℝ tel que $\vec{w}$ =x$\vec{u}$ + 0$\vec{v}$
Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles ∃ y∈ℝ tel que $\vec{w}$ =0$\vec{u}$ + y$\vec{v}$
Si $\vec{w}$ n'est parallèle ni à $\vec{u}$, ni à $\vec{v}$, on peut tracer par A et par D les parallèles à ces vecteurs et construire le parallélogramme ABDC.
Si (AB)// $\vec{u}$ et (BD) //$\vec{v}$ on peut écrire $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = x\vec{u}$ +y$\vec{v}$
Et le parallélogramme ABDC étant unique, x,y sont les seuls nombres pour lesquels cette égalité est possible.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs non colinéaires du plan.
Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe 2 nombres réels uniques, x et y tels que $\vec{w}$ = x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$.
On dit que {$\vec{u}$, $\vec{v}$ } forment une base du plan et que (x,y) sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base.

Remarque: si on connait les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base ($\vec{u}$,$\vec{v}$) $\vec{w}$ = x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$ et les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) d'un repère ($\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$) il est facile de calculer les coordonnées de $\vec{w}$ dans ($\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

Trigonométrie



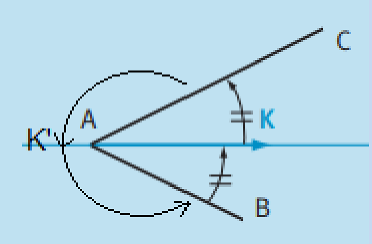
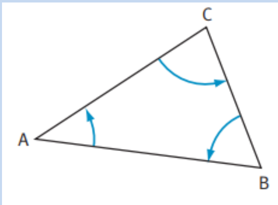
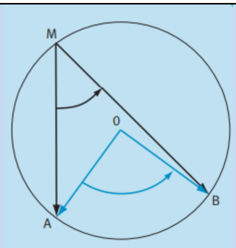
On a vu en classe de seconde (chapitre "fonctions circulaires" du domaine "fonctions") les définitions, du cercle trigonométrique, de la mesure en radians des angles, des lignes trigonométriques (sinus et cosinus) de ces angles.
Pour représenter un angle de mesure x radians, on choisit le secteur $\widehat{AOM}$ de notre figure où OA est porté par l'axe Ox et M est un point du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'arc $\widehat{AM}$ soit x. Dans ces conditions l'angle $\widehat{AOM}$ a pour mesure x en radians. Les coordonnées du point M sont (cos x, sin x).
Au point M correspondent une infinité de mesures d'angles selon qu'on va de A à M dans le sens positif ou dans le sens négatif et selon qu'on fait 0, 1, 2 ou … n fois le tour complet du cercle.
L'une de ces mesures x est comprise entre 0 et 2π en tournant dans le sens positif. Il lui correspond une mesure x' comprise entre 0 et – 2π dans le sens négatif. x' = x – 2π.
Et toutes les mesures possibles d'un angle sont x+2kπ (ou x'+2kπ) avec k∈ℤ.

Mais en fait une seule des mesures x ou x' appartient à l'intervalle]–π ; +π].
C'est elle qu'on appelle **mesure principale** de l'angle et c'est elle qu'on va généralement utiliser dans ce qui suit.
Donc si M se situe sur l'arc $\widehat{ABC}$ du dessin, sa mesure principale sera positive et comprise entre 0 et π (π inclus)
Si M se situe sur l'arc $\widehat{ADC}$ du dessin sa mesure principale sera négative et comprise entre 0 et –π (–π exclu)
Si x est la mesure principale d'un angle, l'ensemble de toutes ses mesures possibles est {x + 2kπ avec k∈ ℤ }.

Voici quelle est la mesure principale de certains angles importants:

Degrés	0	30	45	60	90	180	270	300	315	330	360
Radians	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	–π/2	–π/3	–π/4	–π/6	0

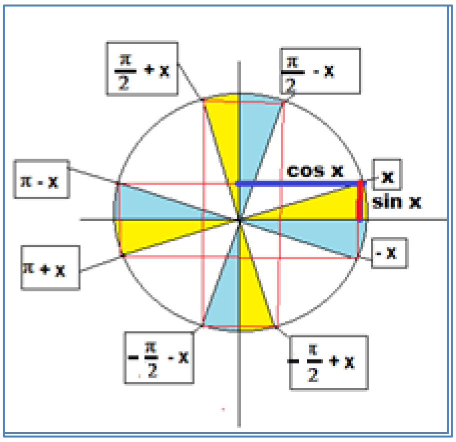
Des relations "naturelles" entre les mesures principales de certains angles

		
La bissectrice d'un angle le coupe en 2 angles de mesure principale égale.	La somme des mesures principales des angles d'un triangle est égale à π.	La mesure principale d'un angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit interceptant le même arc.

Quelques lignes trigonométriques à connaître:

x en degrés	0	30	45	60	90
x en radians	0	π/6	π/4	π/3	π/2
Sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Des relations très utiles entre certaines lignes trigonométriques:



angle	x	π/2–x	π/2+x	π–x	π+x	–π/2-x	–π/2+x	-x
sinus	Sin x	cos x	cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x
cosinus	Cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x	sin x	Cos x

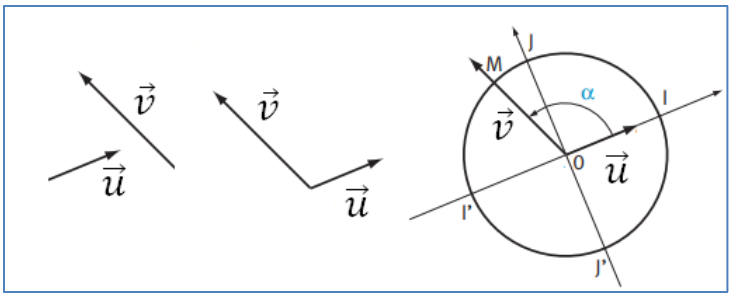
On voit notamment que deux angles x et π–x ont le même sinus
Et deux angles x et –x ont le même cosinus.
En conséquence si on doit résoudre une équation de type
Sin x = 0,5. Les solutions seront {π/6 ; π -π/6} ou mieux {π/6+2kπ ;5π/6+2kπ}
Pour cos x =$\sqrt{2}/2$ les solutions seront {π/4 +2kπ ; –π/4 + 2kπ}

Résoudre certaines équations en cos x ou sin x

Cos x = a (avec a = cos t) a pour solutions {t + 2kπ ; –t + 2kπ}

Sin x = a (avec a = sin t) a pour solutions {t + 2kπ ; π – t + 2kπ}

Angle de 2 vecteurs



L'angle de 2 vecteurs (ainsi que sa mesure) est noté $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$

Pour évaluer l'angle de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il faut d'abord les déplacer afin qu'ils aient une origine commune, O. Puis imaginer un cercle trigonométrique d'origine O, le premier vecteur $\vec{u}$ coïncidant avec le demi-axe (Ox) du repère associé, (Oi) sur notre figure. M est le point du cercle tel que $\overrightarrow{OM}$ ait même sens et même direction que $\vec{v}$
Alors on peut dire que $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \widehat{IOM}$.

Remarquons que si on veut évaluer l'angle $(\vec{v}\ ,\vec{u})$ c'est le vecteur $\vec{v}$ qui va coïncider avec l'axe (OI). Sur notre figure, en tournant dans le sens positif la mesure de angle $(\vec{v}\ ,\vec{u})$ sera plus grande que π .
Donc sa mesure principale sera $(\vec{v}\ ,\vec{u}) = -(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

Donc, en fait, pour évaluer la mesure principale de l'angle de deux vecteurs, il faut les imaginer avec une origine commune O puis tourner <u>de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$</u> sur un cercle de centre O, <u>en décrivant un angle inférieur ou égal à π</u>.
La valeur absolue de la mesure de l'angle décrit étant x en radians, la mesure principale de $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ est
$(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ = x si on a tourné dans le sens positif ou **$(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ = – x** si on a tourné dans le sens négatif.

Propriétés importantes

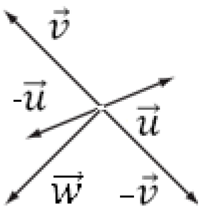
Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

a. $(\vec{u},\vec{u}) = 0 + 2k\pi$ et $(\vec{u},-\vec{u}) = \pi + 2k\pi$;

b. $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}) + 2k\pi$;

c. $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) + 2k\pi$; c'est ce que l'on appelle la relation de Chasles pour les angles orientés ;

d. $(\vec{u},-\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi + 2k\pi$.



Les propriétés ci-dessous concernent les mesures principales des angles

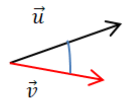
Alignement: A, B, C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi$

Parallélisme: (AB) // (CD) si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi$

Orthogonalité: (AB) ⊥ (CD) si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi/2$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\pi/2$

Produit scalaire

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est une opération qui a un couple de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) fait correspondre un nombre réel



Première définition: $\vec{u}.\vec{v}$ = $||\vec{u}||\,||\vec{v}||$ cos($\vec{u}$, $\vec{v}$)

De cette définition on tire les propriétés suivantes.

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ → $\vec{u}.\vec{v} = 0$

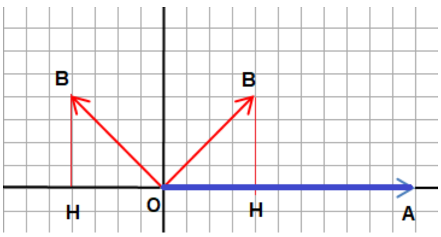
$\vec{u}.\vec{u} = (\vec{u})^2 = ||\vec{u}||^2$ **(carré scalaire)**

$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$ **notamment** $(-\vec{u}).\vec{v} = -(\vec{u}.\vec{v})$

Angle $(\vec{u},\vec{v})$	-π		-π/2		0		π/2		+π
Signe de $\vec{u}.\vec{v}$		–	0	+		+	0	–	

Angle $(\vec{u},\vec{v})$	-π/2	0	+π/2	+π
valeur de $\vec{u}.\vec{v}$	0	$\|\|\vec{u}\|\|\ \|\|\vec{v}\|\|$	0	$-\|\|\vec{u}\|\|\ \|\|\vec{v}\|\|$
Position relative de $\vec{u},\vec{v}$	orthogonaux	colinéaires	orthogonaux	colinéaires

Deuxième définition : Si $\overrightarrow{OH}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ = OA.OH ou –OA.OH selon que ($\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$) ∈[–π/2 ; +π/2] ou pas



Soit un repère orthonormé O($\vec{\imath},\vec{\jmath}$) avec $\vec{\imath}$ colinéaire de même sens que $\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ =OA.OB.cos($\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$) et $\overrightarrow{OH}$ projection de $\overrightarrow{OB}$ = OB.cos($\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$)$\vec{\imath}$
D'où l'équivalence des 2 définitions du produit scalaire.
Par ailleurs si on pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ de coordonnées (Xv,Yv)
Xv = OB.cos($\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$) d'où $\vec{u}$.$\vec{v}$ = $||\vec{u}||$.Xv
Si on remplace $\vec{v}$ par $\vec{v}$+$\vec{w}$ on trouve
$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = |\vec{u}|X_{v+w} = |\vec{u}|(X_v + X_w) = |\vec{u}|X_v + |\vec{u}|X_w = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

D'où on tire de nouvelles propriétés importantes

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Troisième définition: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$

(tirée des propriétés précédentes)

Quatrième définition:
Dans un repère orthonormé soit $\vec{u}$ *de coordonnées* (x, y) et $\vec{v}$ *de coordonnées* (x', y'), alors…
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Dans la 3e définition, on remplace les normes par leur valeur en fonction des coordonnées des vecteurs
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left||\vec{u}|\right|^2 + \left||\vec{v}|\right|^2 - \left||\vec{u}-\vec{v}|\right|^2\right) = \frac{1}{2}[(x^2+y^2) + (x'^2+y'^2) - ((x'-x)^2 + (y'-y)^2)]$ = xx'+yy'
On remarque qu'en associant 1ere et 4eme définition connaissant les coordonnées de 2 vecteurs u et v on peut écrire xx' + yy' = ($\sqrt{x^2+y^2}$) ($\sqrt{x'^2+y'^2}$) cos (u,v) pour **calculer cos(u,v)** (et donc l'angle (u,v))

Applications des propriétés du produit scalaire.

Relations métriques dans un triangle quelconque

Théorème de la médiane.

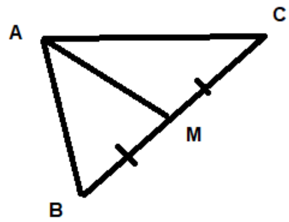
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}$$

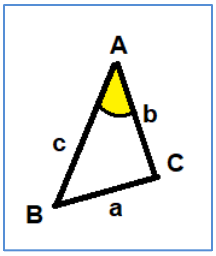
$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

ABC, triangle quelconque. M est le milieu de BC.

Pour démontrer ces relations il suffit de remplace $\overrightarrow{AM}$ par $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ et $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$



Al Kashi

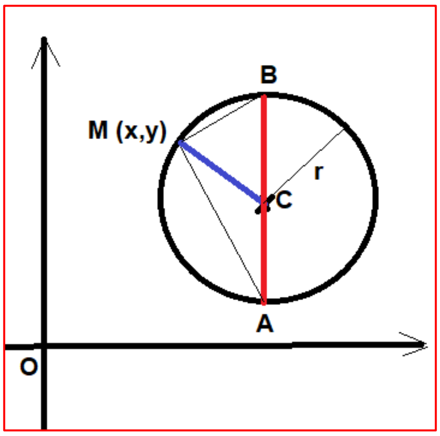


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})$$

Il suffit d'écrire $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ puis de faire le carré scalaire des 2 membres.
En remarquant que le double produit $2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2bc.\cos(\hat{A})$

Equation d'un cercle

Il y a plusieurs façons d'écrire l'équation d'un cercle de centre C (Xc ; Yc) et de rayon r.



On peut écrire que c'est le lieu des points M de coordonnées (x,y) tels que la distance de M au centre est r.
CM = r ou plutôt $CM^2 = r^2$ s'écrit

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2.$$

On peut écrire que c'est le lieu des points M depuis lesquels on intercepte le diamètre AB selon un angle droit.
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pm\pi/2$ s'écrit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ soit xx'+yy' = 0. Dans ce cas cela donne:

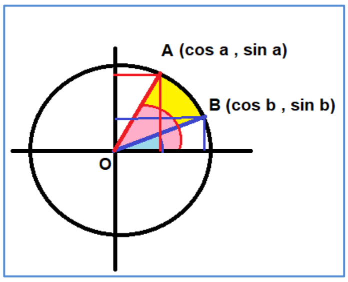
$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0.$$

Ce qui développé donne une équation de type $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Applications à la trigonométrie

Formules d'addition et de duplication

On se souvient de cos(x)=cos(–x), sin(x)= – sin(–x) , cos(π/2–x)=sin(x) , sin(π/2–x)=cos(x)



Sur le cercle trigonométrique on situe les points
A de coordonnées (cos a, sin a)
B de coordonnées (cos b, sin b) (a et b quelconques)
L'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = b - a$ et le produit scalaire
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ =1.1.cos(b–a) = cos(a-b) (1^{ere} définition)
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ == cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b) (4^{eme} définition)
On a donc cos(a–b)= cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b) (1)
Ensuite en replaçant **b** par **–b** dans (1)
cos(a–(–b))= cos(a)cos(–b)+sin(a)sin(–b) → cos(a+b)=cos(a)cos(b)–sin(a)sin(b) (2)

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).$$

En suite **a** ⇄ **π/2 –a** dans (1)→ cos[(π/2–a)–b)]=cos(π/2–a)cos(b)+sin(π/2–a)sin(b)→sin(a+b)=sinacosb+cos(a)sin(b) (4)
Ensuite **b** ⇆ **–b** dans (4) →sin(a–b)=sin(a)cos(–b)+cos(a)sin(–b) → sin(a–b) = sin(a)cos(b)–cos(a)sin(b) (3)

Ensuite, il suffit de remplacer **b** par **a** dans cos(a+b) et sin(a+b) et on trouve les formules de duplication qui permettent, connaissant les lignes trigonométriques d'un angle a de calculer celles d'un angle double (2a.)

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a),$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(b).$$