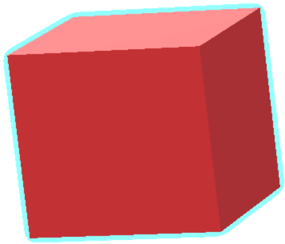
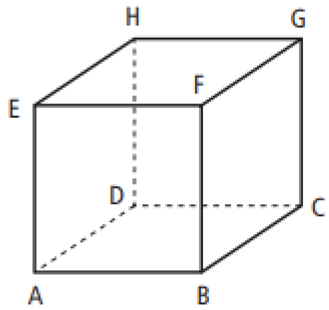
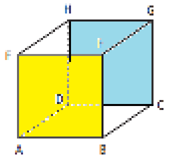
Géométrie dans l'espace

Table des matières

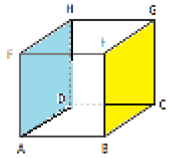
Dessiner en 3D

	
Le modèle solide tel qu'on le voit.	**Sa représentation en perspective dans l'espace**

Pour dessiner en 3D les solides ayant des faces planes nous utiliserons autant que possible la technique exposée ci-après:



■ Le plan frontal (AEFB) de l'objet dessiné ainsi que les plans parallèles au plan frontal (DHCG) quelle que soit leur forme géométrique) et les objets (points, droites, figures) contenus dans ces plans, ne seront pas déformés sur le dessin. Ils apparaîtront tels qu'ils sont sur le modèle.

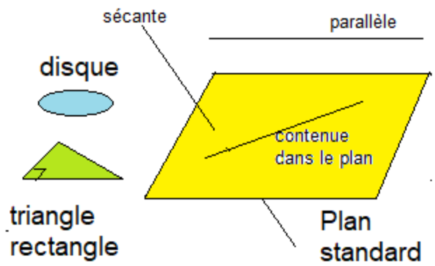


■ Par contre les fuyantes, feront avec les lignes du plan frontal un angle différent de l'angle réel afin de traduire l'effet de perspective. (Dans la réalité, BF et BC sont perpendiculaires alors que ce n'est pas le cas sur le dessin). Les angles que font les fuyantes avec les verticales du plan frontal permettent de simuler une vue de la gauche ou de la droite, une vue en plongée (depuis le haut) ou en contreplongée (depuis le bas).

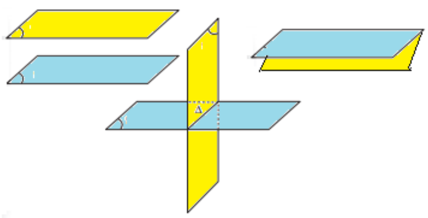
Les lignes invisibles sur le modèle pourront (ou non) être reproduites en pointillés sur le dessin.

Sur toutes les faces, les propriétés suivantes seront reproduites du modèle sur le dessin

- ■ Conservation de l'alignement de 3 points
- ■ Conservation d'un point partageant un segment selon un rapport donné (notamment le milieu)
- ■ Conservation du parallélisme de deux droites
- ■ Conservation de l'égalité de longueur de segments parallèles



La perspective fait donc apparaître un rectangle ou un carré non frontal comme un parallélogramme.
En perspective, un plan standard (supposé horizontal) sera dessiné comme un parallélogramme. Sauf bien sûr s'il s'agit du plan d'un disque, d'un triangle ou d'une autre figure.
Ici on voit comment on peut dessiner une droite selon qu'elle est
Contenue dans le plan
Parallèle au plan
Sécante au plan



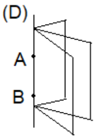
Ici on voit comment dessiner en perspective
2 plans parallèles
2 plans qui se coupent à angle droit (on dit qu'ils sont orthogonaux)
2 plans qui se coupent selon un angle inférieur à 90°.
On constate que l'image de 2 plans sécants ressemble à un livre ouvert ou à une porte ouverte reliée au mur par une charnière.

On verra plus loin que quand un plan coupe un autre plan c'est toujours selon une droite.
C'est aussi le cas sur nos dessins.

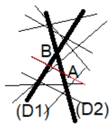
Cela dit, on pourra utiliser dans nos dessins un autre point de vue (par exemple des plans de profil apparaissant comme des droites) pour illustrer une propriété géométrique fondamentale de la figure.

Propriétés fondamentales des plans

■ Si 2 points A et B appartiennent au plan (P) alors tous les points de la droite (AB) appartiennent à (P).
■ 2 droites distinctes d'un plan sont soit sécantes, soit parallèles.
■ Le seul plan inclus dans (P) est (P) lui-même.



On peut imaginer tous les plans contenant la droite (AB), (ou contenant les points {A; B}), comme toutes les positions d'une porte qui s'articulerait autour d'une charnière (AB).
Ou comme les pages d'un livre ouvert dont (AB) serait le dos de la reliure.

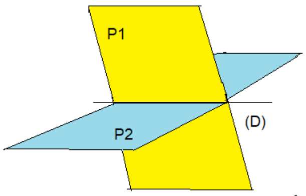


Soient 2 droites (D1) et (D2) **sécantes** ou **parallèles**.
■On définit le plan de (D1) et (D2) comme l'ensemble des points composant toutes les droites (AB) s'appuyant sur (D1) et (D2), c'est-à-dire telles que A∈(D1) et B∈(D2).
■Soient (D3) et (D4) 2 droites distinctes de ce plan. Le plan de (D3) et D(4) est le plan de (D1) et D2).
■ Le plan de (D1) et (D2) est le seul plan contenant (D1) et D2).

En effet, appelons (P) le plan de (D1) et (D2). Soient (D3) et (D4) 2 droites distinctes de (P). Si A ∈(D3) et B∈(D4) alors A et B appartiennent à P et la droite (AB) ∈ P. On en déduit que le plan de (D3) et (D4) est (P).
Si (P') un autre plan que (P) contient (D1) et (D2) alors il contient toutes les droites (AB) avec A∈(D1) et B∈(D2) donc il contient (P) et en conclusion (P') = (P).
Un point est extérieur au plan de (P) quand il n'appartient à aucune des droites (AB) telles que A∈(D1) et P∈(D2).

Soient 2 droites (D1) et (D2) **sécantes** en **O**.
Soit $\vec{\imath}$ un vecteur directeur de (D1) et $\vec{\jmath}$ un vecteur directeur de (D2).
On peut définir le plan de (D1) et (D2) comme l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec x∈ℝ et y∈ℝ .

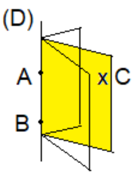
Lorsque 2 plans (P1) et (P2) non confondus se coupent, leur intersection est une droite.



En effet si cette intersection contient au moins 2 points A et B, elle contient la droite (AB). Puisque A et B appartiennent à la fois à (P1) et à (P2) c'est aussi le cas de (AB). Supposons que l'intersection des 2 plans contienne aussi un point C extérieur à (AB). Alors A,B,C et donc (AB) et (AC) appartiennent à (P1) et à (P2).Cela signifie que (P1) est le plan engendré par (AB) et (AC) et P2 aussi. Comme ce plan est unique (P2) et (P1) devraient être confondus alors que notre hypothèse de départ est qu'ils ne le sont pas.
Donc le point C ne peut exister et l'intersection de (P1) et (P2) se réduit à la droite (AB).

Il existe un plan et un seul contenant 3 points non alignés A, B, C.
Donc 3 points non alignés définissent un plan unique qui est celui du triangle (ABC)

En effet, un plan contenant A et B contient (AB), un plan contenant A et C contient (AC).
Le plan engendré par (AB) et (AC) contient donc A,B et C et on sait que c'est l'unique plan contenant ces deux droites, donc l'unique plan contenant A, B et C.



Pour reprendre notre image de l'ensemble des plans contenant la droite (AB), on voit que parmi toutes les positions de la porte ou parmi toutes les feuilles du livre articulées sur (AB) une seule peut contenir le point C.
La même observation prouverait que si (AB) et (AC) sont des droites sécantes ou si (AB) et (DC) sont des droites parallèles, il existe un seul plan passant par (AB) qui contienne ces 2 droites.
Voilà qui confirme les résultats précédents.

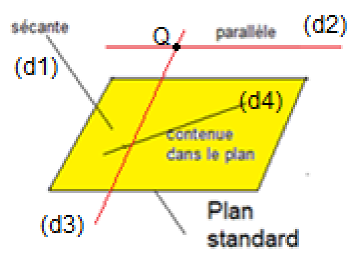
Plus de 3 points ou plus d'une droite sont dits "**coplanaires**" quand ils appartiennent à un même plan.

Dans un problème, une fois établi que des points, des droites, des figures sont coplanaires, on peut raisonner sur eux exactement comme on a l'habitude de le faire dans le cadre de la géométrie plane.
C'est ce qu'on s'efforcera de faire le plus souvent possible.

Parallélisme

Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Dans un plan 2 droites distinctes sont soient parallèles, soit confondues.
Et par un point du plan on ne peut construire qu'une parallèle à une droite du plan.

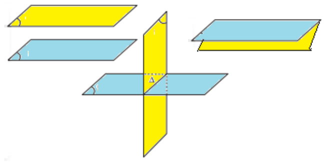


Dans l'espace à 3 dimensions.

Une droite (D) peut être parallèle à un plan (P) si $(D)\cap(P) = \emptyset$,
sécante à un plan si $(D)\cap(P)$ = un point unique
ou contenue dans un plan si $(D)\cap(P) = (D)$

- ■ 2 droites peuvent ne pas se couper sans être parallèles.(exemple (d1) et (d4))
- ■ 2 droites sont parallèles si elles ne se coupent pas et si elles sont coplanaires.
- ■ Par contre 3 droites ou plus peuvent être parallèles sans être toutes dans le même plan (par exemple les 4 arêtes parallèles d'un cube).
- ■ Par un point extérieur au plan, on peut mener plusieurs parallèles à un plan. Par exemple (d2),(d3) à partir du point Q.

Positions relatives de 2 plans



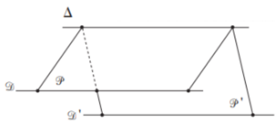
Dans l'espace à 3 dimensions

■ Deux plans distincts sont soit parallèles, soit sécants.
S'ils sont sécants on a vu que leur intersection $(P) \cap (P')$ est une droite.
■ Par un point extérieur au plan (P) on ne peut construire qu'un plan parallèle à (P).

■ Pour qu'un plan (P') soit parallèle à un plan (P), il suffit qu'il contienne 2 droites sécantes parallèles à (P)

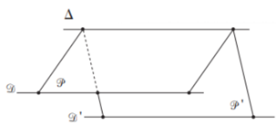
En effet, si le plan contenant (D) et (D') coupe (P), il le coupe suivant une droite Δ et les droites (D) et (D') n'étant pas parallèles, il y en a forcément une qui coupe Δ et donc qui coupe (P).
Or cela est contraire aux hypothèses. Donc aucune droite de (P') ne coupe (P) et (P') // (P).

■ 2 droites distinctes parallèles à une même 3^{e} sont parallèles entre elles.



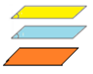
En effet supposons (D) // (Δ) et (D')//(Δ). Soit $\overrightarrow{u_\Delta}$ un vecteur directeur de Δ. C'est aussi un vecteur directeur de (D) et (D') et 2 droites ayant un même vecteur directeur sont parallèles.

■ Théorème du toit :
Soient (D) et (D') 2 droites parallèles. Soit (P) un plan contenant (D) et (P') un plan contenant (D').
Si (P) et (P') distincts, se coupent, leur droite d'intersection (Δ) est parallèle à (D) et à D').



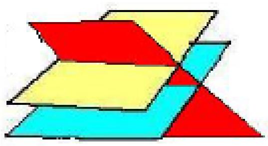
En effet, si, par exemple (D) coupe (Δ), en un point A, $A \in P'$. Et comme par un point on ne peut mener qu'une parallèle à (D'), (D') et A étant dans (P') la parallèle (D) à (D') passant par A est aussi dans (P'). Si (D) est en même temps dans (P) et (P') c'est que c'est leur droite d'intersection ce qui est contraire aux hypothèses.
Donc ni (D) ni (D') ne coupent (Δ), elles sont parallèles à cette droite.

■ 2 plans (P') et (P'') distincts parallèles à un même 3^{e} (P) sont parallèles entre eux.



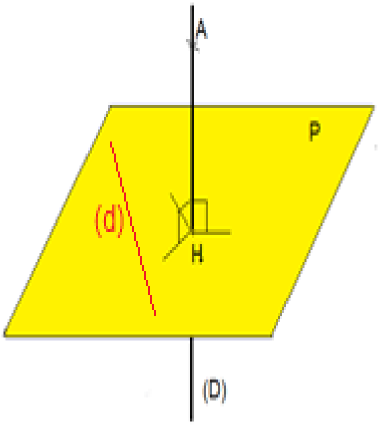
En effet si (P') coupe (P''), soit A un point de leur intersection, cela voudrait dire qu'on peut construire 2 plans distincts parallèles à (P) et passant par A. Or nous savons que cela est impossible.

Soient 2 plans parallèles (P) et (P')
- ■ Toute droite (D) qui coupe (P) coupe (P')
- ■ Si un plan (P'') coupe (P) selon une droite (D) , il coupe (P') selon une droite (D') parallèle à (D).



■ (D) coupe (P) en Q. Si (D) ne coupe pas (P') , (D) // (P') et passe par Q. Donc (D) est contenue dans (P) ce qui est contraire aux hypothèses.
■ (D) et (D') qui appartiennent à des plans parallèles ne se coupent et dès lors qu'elles appartiennent au même plan (P'') elles sont parallèles.

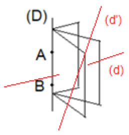
Orthogonalité



Un cas particulier de droite sécante à un plan

Une droite (D) est **orthogonale** à un plan quand elle coupe ce plan en un point H et que toutes les droites du plan passant par H sont perpendiculaires à (D).

Une droite (D) est dite orthogonale à une autre droite (d) s'il existe un plan passant par (d) orthogonal à (D).
Ou si une parallèle à (D) menée par un point de (d) est perpendiculaire à

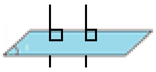


Ainsi toutes les droites du plan (P) de notre figure sont orthogonales à (D).
Parmi toutes ces droites, celles qui coupent (D) sont dites perpendiculaires à (D).
Sur la figure ci-contre on voit qu'il peut exister un plan passant par (D) et orthogonal à (d) mais aucun plan passant par (D) et orthogonal à (d').
Donc (D) est orthogonale à (d) mais pas à (d').

Il suffit qu'un plan contienne 2 droites sécantes orthogonales à (D) pour qu'il soit orthogonal à (D).

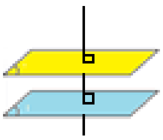
En effet , soient (D1) et (D2) les parallèles à ces sécantes en H. (D1) et (D2) sont ⊥ à (D).
Si (D1) et (D2) appartiennent au plan orthogonal en H à (D) le problème est résolu puisque le plan de (D1) et (D2) est le plan orthogonal à (D) en H.
Si par exemple (D1) n'appartient pas au plan orthogonal à (D) en H, le plan de (D) et (D1) coupe le plan orthogonal selon une droite (Δ) et les angles (D),(Δ) et (D),(D1) mesurant 90° les 3 droites étant dans le même plan, (D1) et (Δ) sont confondues ce qui est contraire aux hypothèses. En conclusion, le plan de (D1) et (D2) est le plan orthogonal à (D).

■ 2 droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.



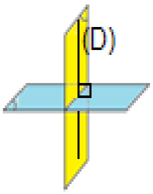
En effet si ces 2 droites (D) et (D') coupent le plan en H et H', Dans le plan de (D) et (D'), (HH') est perpendiculaire à (D) et à (D') et 2 droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

■Si 2 plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.



En effet, supposons que la droite (D) coupe les plans en H et H'. Soit (d) une droite de (P) passant par H. Elle est perpendiculaire à (D). Le plan des 2 droites (d) et (D) coupe (P') en (d'). (d') étant parallèle à (d) , (d') est perpendiculaire à (D) en H'.
Il suffit de recommencer avec une autre droite de (P) passant par H et le plan (P') contenant 2 droites perpendiculaires à (D), il est orthogonal à (D).

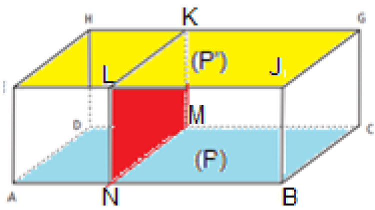
Plans orthogonaux



Le plan (P') est orthogonal au plan (P) si (P') contient une droite (D) orthogonale à (P).

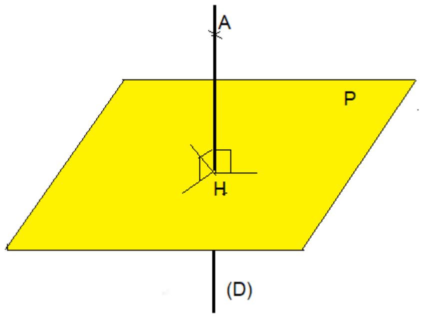
Remarquons que tous les plans contenant (D) vérifient cette condition et donc
- ■ Tous les plans contenant une droite (D) orthogonale à (P) sont orthogonaux à (P).
- ■ (D) est perpendiculaire à Δ la droite d'intersection de (P) et (P').
- ■ (D) orthogonal à (P) et (P') orthogonal à toute droite perpendiculaire à Δ

■ Si 2 plans sont parallèles, tout plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.



Le plan (P'') est orthogonal à (P) et (P) est // à (P'). (MN) = (P)'' ∩ (P)
Soit (NL) orthogonale à (P). (NB) est une droite de (P) passant par N.
(LJ) est l'intersection du plan (LNB) avec (P'). (LK) =(P'') ∩ (P').
Le parallélisme des plans et l'appartenance à un même plan implique (MN)//(LK) donc (LK) ⊥ (LN) et (NB) //(LJ) donc (LJ) ⊥ (LN).
Si 2 droites sécantes de (P') sont ⊥ à (LN) alors (P') ⊥ (LN) et donc à (P'').

Solides usuels



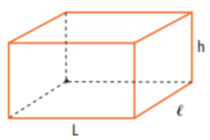
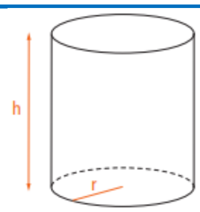
Une droite (D) est **orthogonale** à un plan quand elle coupe ce plan en un point H et que toutes les droites du plan passant par H sont perpendiculaires à (D).

Soit A un point extérieur au plan.
Soit (D) une droite passant par A et orthogonale au plan.
(D) coupe le plan en H.
La distance entre A et H est aussi la **distance de A au plan**.
On dit aussi que AH est la **hauteur de A par rapport au plan**.

Solides de type "barreau"

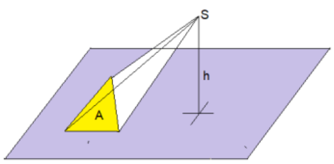
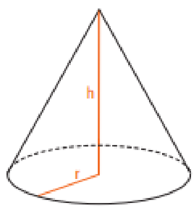
C'est l'ensemble des points décrits par la translation d'une figure plane appelée base (chaque point de la base se déplace d'un vecteur $\vec{u}$, parallèlement à sa position initiale). Ce solide a donc une face parallèle à la base. **La hauteur** d'un tel solide est la hauteur d'un point de cette face par rapport au plan de la base.

Si A est la surface de sa base et h sa hauteur, le volume d'un tel solide est V = A.h

	**Parallélépipède rectangle.** Base rectangulaire. A = L . ℓ V = A.h = L. ℓ. h		**Cylindre.** Base circulaire de rayon r.. A = π r^2. V = A.h = (πr^2).h

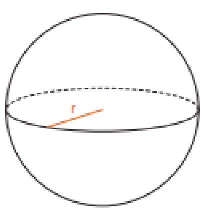
Solides de type "pointu".

La base est une figure plane. Le sommet S est un point extérieur à cette surface. Le solide est formé par l'ensemble des points des segments de droites qui joignent chaque point de la base au sommet.
La hauteur d'un tel solide est la hauteur de son sommet par rapport au plan de la base.
Si A est la surface de la base et h sa hauteur, le volume d'un tel solide est V=$\frac{1}{3}$ A.h.

	**Pyramide** Base : polygone quelconque A = selon le polygone V=$\frac{1}{3}$ A.h.		**Cône** Base : circulaire de rayon r A = πr^2. V = $\frac{1}{3}$A.h = $\frac{1}{3}$(πr^2).h

Boule

Ensemble des points décrits par la rotation d'un disque autour de l'un de ses diamètres.

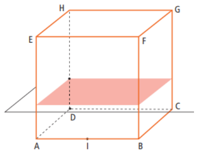
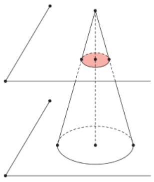
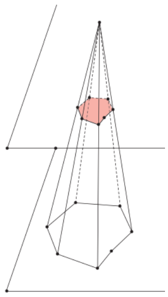
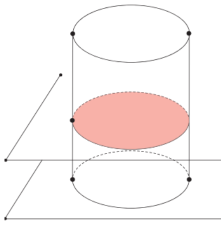
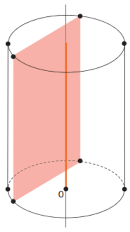
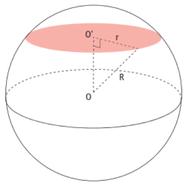


Le rayon du grand cercle générateur est r.

V = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Intersection de solides et de droites ou de plans.

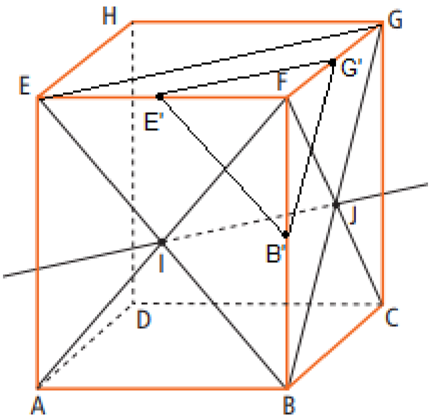
Cas des solides usuels coupés par un plan (P) particulier.

					
Section d'un cube par (P) // à la base = carré	Section d'un cône par (P) // à la base = disque	Section d'une pyramide par (P) // à la base = polygone semblable à la base	Section d'un cylindre par (P) // à la base = disque	Section d'un cube par (P) ⊥ à la base = rectangle	Section d'une boule par (P) quelconque = disque

(Dessins extraits du site de l'académie en ligne. Remerciements à l'auteur).

■ Dans le cas du cube ou du cylindre les dimensions de la section sont les mêmes que celles de la base.
■ Dans le cas du cône et de la pyramide, Thales permet de trouver les dimensions de la section quand on connaît le rapport de similitude qui est le rapport de la hauteur du sommet par rapport plan de coupe à la hauteur du solide.
■ Dans le cas du cylindre coupé par un plan // à son axe et dans le cas de la boule coupée par un plan, si on connaît les dimensions du solide coupé et la distance du plan de coupe à l'axe du cylindre ou au centre de la sphère, Pythagore permet de calculer la largeur du rectangle ou le rayon du disque.

Exemples de problèmes

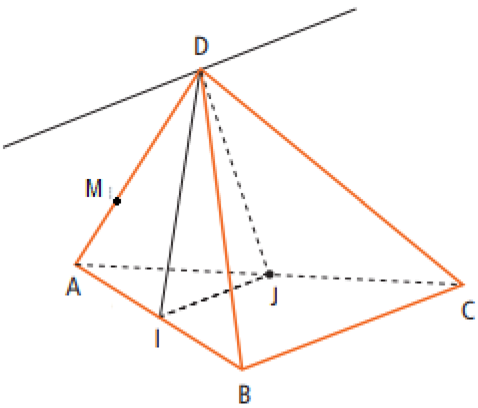


Le cube

Démontrer que (IJ) // (EHGF)

Chercher
(FGCB) ∩ (EFGH)
(EBC) ∩ (EFGH)
(ABCD) ∩ (EFGH)
(EFG) ∩ (EFGH)

Si E',G',B' sont les milieux des segments sur lesquels ils sont situés,
Démontrer que (E'B'G') // (EBG) .



Le tétraèdre

I milieu de [AB] et J milieu de [AC]
Déterminer l'intersection des plans (IJD) et (BCD)
Utiliser le théorème du toit.

M est tel que AM = $\frac{1}{3}$ AD
Déterminer (MI) ∩ (BCD)

(MI) ∈(ABD).
Donc le point recherché ∈ (ABD) ∩ (BCD)
(BD) = (ABD) ∩ (BCD).
Donc (MI) va couper (BCD) sur (BD) .
On prolonge donc MI et BD et leur point d'intersection est le point cherché.