L'ensemble des nombres complexes

Table des matières

Forme algébrique a + ib

Définition

Soit le nombre imaginaire **i =** $\sqrt{-1}$.
On construit l'ensemble **ℂ des nombres complexes** comme un espace vectoriel de base {1 , i} sur $\mathbb{R}^2$
ℂ est donc l'ensemble des nombres z qui s'écrivent **z = a+bi** avec (a,b)∈$\mathbb{R}^2$.

Unicité de l'écriture Comme tout vecteur s'écrit de façon unique dans une base, pour tout nombre complexe z, il existe un couple de coordonnées uniques (a,b)∈$\mathbb{R}^2$ telles que z =a+ib. Autrement dit a'+ib' =a +ib équivalent à a'=a et b'=b.

Partie réelle, partie imaginaire

Si z =a+ib, a est la partie réelle de z (a = Re(z)) et b la partie imaginaire de z (b=Im(z))

Le nombre **ib est un imaginaire pur**. 0 = 0i est à la fois un réel et un imaginaire pur.
Un nombre complexe z=a+ib est nul, si et seulement si a=0 et b=0.

Une extension de la notion de nombre.

Remarquons que ℝ est l'ensemble des nombres complexes tels que b = 0.
Donc ℝ **est inclus dans** ℂ .
En définissant les nombre complexes, nous avons procédé à une extension de la notion de nombre.
Ces nombres qui ressemblent à des vecteurs permettront de quantifier un concept lié à deux grandeurs dont l'une sera véhiculée par la partie réelle et l'autre par la partie imaginaire.
Par exemple, en électricité, certains composants des circuits traversés par des courants alternatifs ont à la fois des propriétés résistantes, capacitives et de self induction .Or la propriété de résistance au contraire des deux autres n'induit aucun décalage temporel dans les graphes qui représentent l'intensité et la tension en fonction du temps.
En décrivant les 3 caractéristiques du composant par un nombre complexe, dont la partie réelle correspondra à la résistance et la partie imaginaire à la somme algébrique de la capacité et de la self, on aura une perception immédiate du décalage temporel que le composant induira entre intensité et tension dans le circuit auquel on l'aura intégré.

Opérations sur ℂ

ℂ est doté des mêmes règles opératoires que ℝ, la seule différence résidant dans les opérations impliquant i:
Si a est un réel a+i = a+i (pas de réduction possible), le produit de a par i est ai, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ etc ..

addition: (a+ib)+(a'+ib') = (a+a') + i (b+b')
multiplication par un réel λ : λ(a+ib) = (λa) + i (λb)
multiplication: (a+ib)(a'+ib') = (aa'–bb') + i(ab' + a'b)
Inverse: $\frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$
Division : $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \left(\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}\right) + i\left(\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\right)$

.

Le nombre conjugué

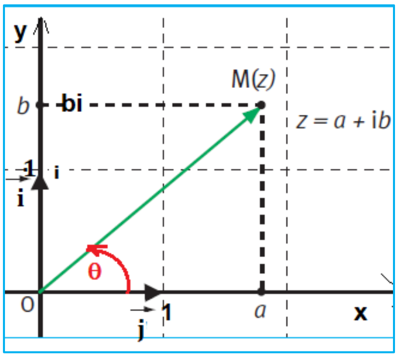
Le nombre conjugué de z = a+ib **est** $\bar{z}$ **= a – ib**

Propriétés du conjugué

Conjugué du conjugué $\bar{\bar{z}}$**=z**
Si λ réel $\bar{\lambda}$ **= λ**
Produit d'un nombre et de son conjugué $z\bar{z} = a^2 + b^2$ **(un nombre réel)**
Partie réelle de z = $\frac{z+\bar{z}}{2}$
Partie imaginaire de z = $\frac{z-\bar{z}}{2i}$
conjugué d'une somme $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
conjugué d'un produit $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$ **et pour n** entier $(\overline{z^n}) = \bar{z}^n$
Si z ≠ 0 conjugué d'un quotient $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Remarquons la technique qui consiste à multiplier dénominateur et numérateur d'une fraction par le nombre conjugué du dénominateur afin que le dénominateur soit un nombre réel, ce qui permet de donner au quotient la forme a+ib

Forme géométrique |z|(cos θ + i sin θ)

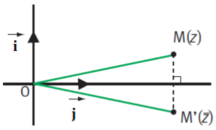


Dans un repère orthonormé O($\vec{j}$, $\vec{i}$) le complexe z = a+ib est représenté à la fois par le point M de coordonnées (a,b) et par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de mêmes coordonnées.
On dit que z a pour **image** le point ou le vecteur et que ceux-ci ont pour **affixe** z
Nous avons choisi d'associer $\vec{i}$ à l'axe des y pour que ce vecteur soit l'image du nombre i.
Les axes du repère servent à la fois à visualiser les composantes (a,b) du complexe (qui sont des nombres réels) par projection de M, et à représenter l'ensemble $\mathbb{R}$ (axe des x) et l'ensemble des imaginaires purs (axe des y).
Dans ce contexte, tout nombre z est équivalent à un <u>unique couple</u> (|z| , θ) tel que:
|z| module de z est le module de $\overrightarrow{OM}$
θ argument de z est l'angle orienté ($\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}$)

Pour z = a+ib on a les relations a= |z| cos(θ) ; b=|z| sin(θ) , $|z|^2 = a^2+b^2$ ou $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$, $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$
qui permettent de passer de la forme algébrique à la forme géométrique de z.

Forme géométrique du nombre z : **|z| (cos(θ)+ i sin(θ))**

Conjugué



Dans cette représentation, l'image du conjugué de z est son symétrique par rapport à l'axe des x.
Si le couple (module, argument) de z est (R,θ) celui de $\bar{z}$ est (R, – θ) .
Si la forme géométrique de z est |z| (cos(θ)+ i sin(θ)) celle de $\bar{z}$ est |z| (cos(θ) – i sin(θ))

Propriétés du module |z| de z

Les nombres z, opposé de z (–z) , conjugué de z ($\bar{z}$), opposé du conjugué de z (–$\bar{z}$) ont même module
|z|= z$\bar{z}$
si λ est un réel |λ|= valeur absolue de λ (aussi notée |z|)
|z z'| = |z| |z'|
$|z^n| = |z|^n$
|z/z'| = |z| / |z'|
2 propriétés qui rapprochent les nombres complexes des vecteurs
|z+z'| ≤ |z| + |z'| Pour les vecteurs | $\vec{u}$ + $\vec{v}$ | ≤ | $\vec{u}$ | +| $\vec{v}$ |
Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' alors |z – z'| = MM' Pour les vecteurs |$\overrightarrow{OM}$ – $\overrightarrow{OM'}$| = MM'

Propriétés de l'argument θ de z

On le note **arg z**.
0 n'a pas d'argument.
Un réel a pour argument **0** (+2kπ) s'il est positif et **π** (+2kπ) s'il est négatif.
Un imaginaire pur a pour argument **π/2** ou **–π/2** .
arg (z z') = arg(z) + arg (z')
arg z^n = n arg (z)
arg (z/z') = arg(z) – arg(z')
arg (1/z) = – arg(z)

Produit, puissance, quotient de nombres complexes sous leur forme géométrique

si **z = R (cos(θ)+ i sin(θ))**
z' = R' (cos(θ')+ i sin(θ'))

zz'	**=**	**RR' (cos(θ+θ') + i sin(θ+θ'))**
z^n	**=**	**R^n (cos(nθ)+ i sin(nθ)**
z/z'	**=**	**R/R' (cos(θ–θ') + i sin(θ–θ'))**

La forme géométrique est très pratique pour élever un nombre complexe à une puissance n, multiplier ou diviser deux nombres complexes, puisqu'il suffit
Pour trouver le module du résultat de faire subir aux modules la même opération qu'aux nombres et pour trouver l'argument du résultat d'ajouter ou de retrancher les arguments selon qu'on multiplie ou qu'on divise.

Forme exponentielle $Re^{i\theta}$

$Re^{i\theta}$ est le nombre complexe de module R et d'argument θ.
Sa partie réelle est Rcos θ est sa partie imaginaire Rsin θ.

$e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1. $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Conjugué de z $= \overline{Re^{i\theta}} = Re^{-i\theta}$

Les lois sur les puissances rendent cette forme parfaitement compatible avec les formes vues jusqu'ici:

Multiplication	**$Re^{i\theta}(R'e^{i\theta'}) = RR'\ e^{i(\theta+\theta')}$**	(module RR' , argument θ+θ')
Division	**$Re^{i\theta}/\ R'e^{i\theta'} = R/R'\ e^{i(\theta-\theta')}$**	(module R/R' , argument θ – θ')
Puissance	**$(Re^{i\theta})^n = R^n\ e^{in\theta}$**	(module R^n, argument nθ)

Complexes et trigonométrie

Retrouver les formules d'addition

La partie réelle de (cos a + i sin a)(cos b + i sin b) doit être cos (a+b) et la partie imaginaire sin (a+b).
Donc si on développe le produit et qu'on sépare partie réelle et partie imaginaire, on retrouve
cos(a+b) = cos a cos b – sin a sin b
sin (a+b) = cos a sinb + sin a cos b
A partir de là dans ces formules, il suffit de remplacer b par a pour trouver cos 2a et sin 2a.
Et de remplacer b par –b sachant que cos –b = cos b et sin – b = – sin b (ou tout simplement d'inverser le signe intermédiaire) pour trouver
cos(a– b) = cos a cos b + sin a sin b
sin (a – b) = cos a sinb – sin a cos b

Utiliser la forme exponentielle pour exprimer cos θ ou sin θ

De $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$	on tire….	**$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2$** **$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i$**

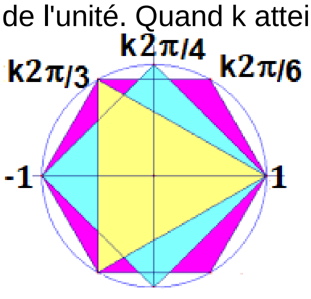
Ces formules permettent de calculer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction de cos pθ ou sin pθ (p variable) ce qui permet de calculer des intégrales de type $\int_a^b \cos^3 t\ dt$. On ne connait pas la primitive de $\cos^3 t$ or

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b + 3ab^2+b^3$. donc $\cos^3 t = \frac{1}{8}(\ e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-i3t}) = \frac{1}{4}\ (\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}) = \frac{1}{4}$ (cos 3t + 3 cos t)

Expression dont on connait la primitive. On pourrait aussi s'en servir pour calculer cos 3t en fonction de cos t.

Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Ce sont les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ tels que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = 1 = e^{i(0+2k\pi)}$.
Autrement dit tout angle θ tel que nθ = 2kπ ou θ =k $\frac{2\pi}{n}$ (où k varie de 0 à n-1) est argument d'une racine $n^{ième}$ de l'unité. Quand k atteint ou dépasse n on retombe sur les racines déjà trouvées.



Toutes les racines ont pour module 1 donc elles sont situées sur un cercle centré en O de rayon 1.
Elles divisent le cercle en n arcs égaux à partir du 1, donc ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit. Angle au centre =k 2π/n (k de 0 à n) On voit ici
Les racines carrées (–1 et 1) (arguments k 2π/2)
Les racines cubiques (arguments k.2π/3) triangle équilatéral (en jaune)
Les racines 4emes (arguments k.2π/4) carré inscrit (en bleu)
Les racines 6emes (arguments k.2π/6) hexagone régulier inscrit (en violet).

A partir des racines nièmes de l'unité on peut trouver les racines nièmes de n'importe quel réel λ (module multiplié par |λ|) ou complexe (module multiplié par |z| et décalage de θ des angles du polygone à partir de 1)

Méthodes

Calcul d'expression comportant un nombre complexe au dénominateur

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9$ commencer par supprimer le complexe du dénominateur (x conjugué) , cela simplifie souvent les calculs

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^9 = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^9 = i^9 = i$

Tout polynôme du second degré à coefficients réels a des racines complexes.

P(X) $=ax^2 + bx + c$
On calcule $\Delta = b^2 + 4ac$

si $\Delta \geq 0$ le polynôme a des racines réelles $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Et si $\Delta < 0$ il n'a pas de racines réelles puisque dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas quand Δ est négatif

Mais il a des racines complexes puisque dans $\mathbb{C}$ quand Δ est négatif

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1)(-\Delta)} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ (avec $-\Delta > 0$). Donc ...

Quand $\Delta < 0$ les racines complexes de $ax^2 + bx + c$ sont $\frac{-b+i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$ ou $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

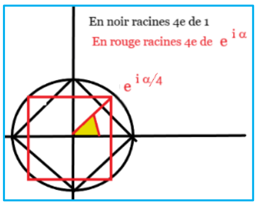
Equations dans $\mathbb{C}$

Ce sont des équations contenant en général comme inconnues z et (ou) $\bar{z}$.
On écrit z = a+ ib , $\bar{z}$ = a –ib puis on fait tout passer dans le premier membre de façon à avoir une équation de type f(a,b) =0 où f(a,b) est un complexe. Ensuite on dit que Re(f(a,b)) = 0 , Im (f(a,b)) =0 et on a 2 équations à 2 inconnues.

■ $(3-i)\bar{z} = \frac{1+i}{1-i}$ donne (3 -3i – i -1)(a-ib) = 1+i =(2 -4i)(a+ib) = (2a+4b) +i(-4a+2b) =1 + i d'où 2a+4b = 1 et 2b – 4a =1
d'où a = – 1/10 et b = 3/10

■ $4z^2+8z\bar{z}-3 = 0$ ou $4(a^2 +2iab +b^2) + 8(a^2+b^2)- 3 = 0$ donc la partie imaginaire 8iab est nulle ce qui implique a=0 ou b=0
si a = 0 → $12b^2 = 3$ → b=+1/2 ou b=–1/2 . Si b= 0 $12a^2 = 3$ → a= +1/2 ou a= -1/2
Les solutions sont donc {+1/2, +1/2i , –1/2 , –1/2i} qui forment un losange de centre O.

Racines nièmes d'un complexe de module 1 $e^{i\alpha}$



$e^{in\theta} = e^{i\alpha}$ d'où $\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ avec k varie de 0 à n .
Les racines nièmes de $e^{i\alpha}$ comme celles de l'unité seront donc les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1, mais ce polygone aura tourné d'un angle $\frac{\alpha}{n}$ par rapport à celui qui représente les racines nièmes de l'unité.
Quant aux racines nièmes d'un complexe quelconque $Re^{i\alpha}$, il suffira de multiplier celles de $e^{i\alpha}$ par $\sqrt[n]{R}$ pour les localiser, toujours en tant que sommets d'un polygone régulier inscrit mais cette fois dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{R}$.

Complexes et géométrie

Rappel : si $\vec{u}$ a pour coordonnées (a,b) , l'affixe de $\vec{u}$ est z_u = a+ib
Distance PQ = |Zp – Zq| image de Zp – Zq = vecteur $\overrightarrow{QP}$

L'affixe de $\vec{u}+\vec{v}$ est $z_u + z_v$	**L'affixe de $\vec{u}-\vec{v}$ est $z_u - z_v$**	**L'affixe de $\lambda\,\vec{u}$ est λz_u**
Le vecteur d'affixe λz_u est // $\vec{u}$	**Le vecteur d'affixe $\lambda i z_u$ est $\perp$ $\vec{u}$**	**Q image de P par rotation (O,π/2) Zq = i Zp**
point Q translaté de vecteur $\vec{u}$ de P si Zq = Zp+Zu	**Q symétrique d'axe Ox de P Zq = $\overline{z_p}$**	**Q symétrique centre O de P Zq = – Zp**

On peut ainsi grâce aux affixes démontrer de nombreuses propriétés géométriques des figures quand on leur superpose un plan complexe.

Remarque importante sur la signification de $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$

Si $\vec{\jmath}$ est le vecteur unitaire de l'axe des x
Z_B-Z_A est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ dont l'argument est l'angle $(\vec{\jmath}, \overrightarrow{AB})$ et $Z_C - Z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AC}$, argument $(\vec{\jmath}, \overrightarrow{AC})$.
L'argument du quotient est $(\vec{\jmath}, \overrightarrow{AB}) - (\vec{\jmath}, \overrightarrow{AC}) = (\vec{\jmath}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}, \vec{\jmath}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ (relation de Chasles)
Quant au module du quotient c'est AB / AC .

Pour démontrer qu'un point P d'affixe Z est situé sur un cercle de centre C (d'affixe Zc) et de rayon R, il faut démontrer que le module de Z – Zc est R.

Exemple Zc = 1+i , Z=3 +2i donc Z – Zc = 2 + i . Le module |Z – Zc| = $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.
Le point P est situé sur le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{5}$

Pour démontrer que ABCD est un parallélogramme, il faut démontrer que $Z_B-Z_A = Z_D - Z_C$.
Pour démontrer que AB⊥ CD il faut démontrer que le quotient $(Z_B-Z_A) / (Z_D - Z_C)$ est un imaginaire pur forme λi.