Limites usuelles

$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ | $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ | $\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ | $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ | $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ | $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

De manière plus générale

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

- En 0 et $-\infty$:

$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $|x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\text{sh}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\text{th}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\text{argsh}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$ | $\text{argth}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ | $\text{ch}\, x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ | $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

De manière plus générale

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors :

$\ln(1+f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ | $\sin(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ | $\tan(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

$\cos(f(x)) - 1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2}$ | $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ | $(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Suite géométrique

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a \in]-\infty,-1] \\ 0 \text{ si } a \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\end{cases}$$

Comparaison des suites de référence

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$ | $n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right)$ | $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

Expressions égales au nombre e → e $=\sum \frac{1}{n!}$ = lim $(1+\frac{1}{n})^n$ et $e^{i\pi} = -1$ (Stirling)

Au voisinage de $+\infty$	
$\mathrm{ch}x \sim \frac{e^x}{2}$	$\mathrm{Arg\,sh}x \sim \ln x$
$\mathrm{sh}x \sim \frac{e^x}{2}$	$\mathrm{Arg\,ch}\,x \sim \ln x$

Dans sh(x) ou ch(x) on a e^{-x} qui tend vers 0 d'où l'équivalent.
Arg shx = $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \sim \ln(2x) \sim \ln(2)+\ln(x) \sim \ln(x)$
Arg chx = $\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \sim \ln(x)$

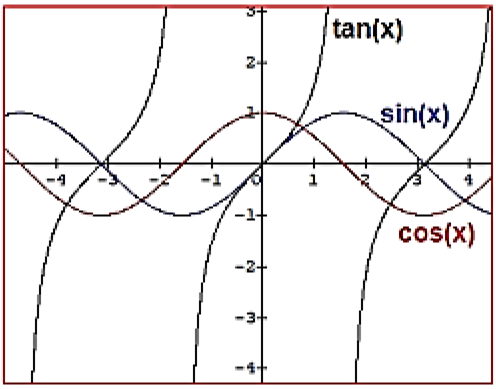
Ne retenir que les 2 premiers termes de chaque développement (ainsi que le procédé qui permet de l'obtenir)

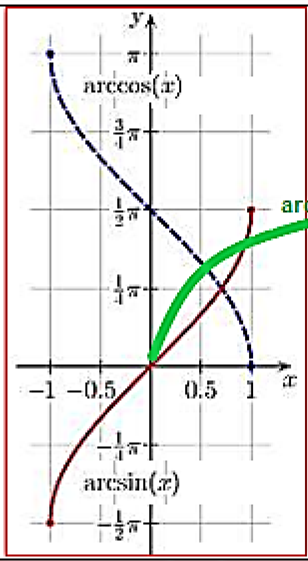
$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \quad +\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\theta x)$$

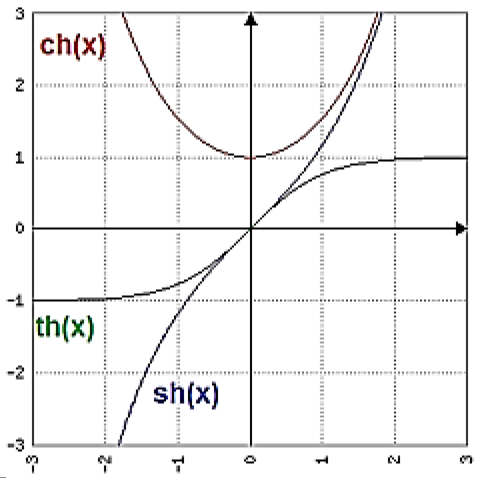
Fonction	Developpement limité	Équivalents en 0
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$	1+x
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^p.\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$	X
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^p.\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$	1
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$	1
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$	X
$(1+x)^m$	$1+m.x+\frac{m.(m-1).x^2}{2!}+\ldots+\frac{m.(m-1)\ldots(m-p+1).x^p}{p!}+o(x^p)$	1+m.x
$\mathrm{sh}\,x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$	X
$\mathrm{ch}\,x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$	1
$\tan x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$	X
$\mathrm{th}\,x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$	X
$\mathrm{Arcsin}\,x$	$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3\ldots..2n-1}{2.4\ldots..2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	X
$\mathrm{Arc\,tan}\,x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	X
$\mathrm{Arg\,sh}\,x$	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1.3\ldots..2n-1}{2.4\ldots..2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	X
$\mathrm{Arg\,th}\,x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	X

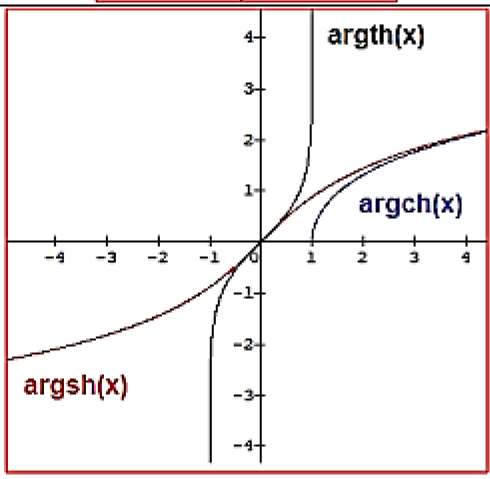
Dérivées des fonctions usuelles

X^n ($n \in$N)	nX^{n-1}	**$\mathrm{Log}_a\,x$**	$1/(x\ln a)$	**Cotan x**	$-1-\cot an^2 x$
X^α ($\alpha \in$R)	$\alpha X^{\alpha-1}$	**Cos x**	$-\sin x$	**Cotan x**	$-1/\sin^2 x$
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$	**Sin x**	Cos x	**Arc cos x**	$-1/\sqrt{1-x^2}$
a^x ($a \in R^{+*}$)	$a^x \ln a$	**Tan x**	$1+\tan^2 x$	**Arc sin x**	$1/\sqrt{1-x^2}$
ln |x|	1/x	**Tan x**	$1/\cos^2 x$	**Arc tan x**	$1/(1+x^2)$









Si on pose **t = tan(x / 2)** on peut écrire

Sin x = $\frac{2t}{1+t^2}$ **Cos x** = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **Tan x** = $\frac{2t}{1-t^2}$ et de x=2Arc tan t +2kπ on déduit **dx** = $\frac{2dt}{1+t^2}$

Tableau de primitives (à une constante près)

$(x-a)^{\alpha}$ $\alpha \neq -1$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tan x	$\frac{1}{1-x^2}$	Arg th x	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\frac{1}{x-a}$ a∈R	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	Arc tan x	
$\frac{1}{x-c}$ c∈R	$\ln\lvert x-c\rvert$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\tan\frac{x}{2}\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arc sin x	
ln x	X (ln x -1)	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	Arg sh x	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
e^{cx}	$\frac{e^{cx}}{c}$	Coth x	$\ln\lvert \operatorname{sh} x\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	Arg ch x	$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
tan x	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	th x	ln ch x	$\frac{1}{x^2-1}$	–Arg th x	$-\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$