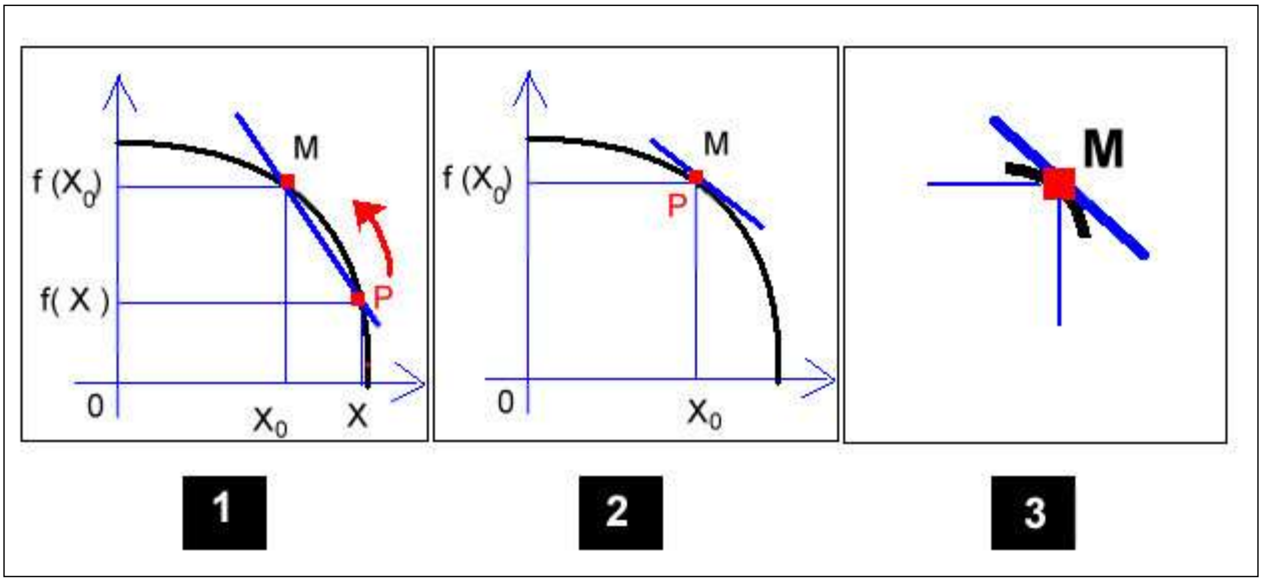
LES DERIVEES ET LEURS APPLICATIONS

Table des matières

Définitions 2
Fonctions dérivables, fonction dérivée 3
Règles de calcul des fonctions dérivées 3
Dérivées des fonctions usuelles 3
Cosinus, sinus, tangente hyperboliques 4
Opérations sur les fonctions et dérivées correspondantes : 4
Fonctions composées 4
Dérivée de la fonction réciproque : 5
Dérivées d'ordre supérieur 6
Notion de classe 6
Propriétés des fonctions dérivables 6
Lemme de Rolle 6
Accroissements finis 7
Conséquence sur les variations de f 7
Continuité de la dérivée f ' 7
L'inégalité des accroissements finis 8
Formules d'ordre 1 de Mac Laurin et de Taylor 8
Formules générales de Mac Laurin et de Taylor 8
Utilisation géométrique de la dérivée seconde 9

Définitions



1 Soit M (x_0 , f(x_0)) , un point fixe de la courbe d'équation y = f(x)
Et P (x , f(x)) un point mobile de la même courbe, distinct de M.
La droite (MP) est dite « sécante à la courbe » , son équation est **y = ax + b** et **a** , son coefficient directeur est égal au **taux de variation de f** entre x_0 et x : **a** = $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$.

2 Lorsque le point P se rapproche de M : $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$ donc le numérateur et le dénominateur de **a** tendent vers 0 , mais à la limite, quand M et P sont confondus, la droite (MP) devient tangente à la courbe (localement elle la touche en un seul point) et cette tangente a un coefficient directeur **A** qui doit vérifier
A = $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$

En effet, qu'on choisisse P à droite de M ou à gauche de M , dans la situation du dessin et dans le cas général, la droite (MP) tend vers la même tangente avec le même coefficient directeur.

Si A = $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ existe (ce qui suppose que A est un nombre fini),
on dit que A est le **nombre dérivé** de f au point x_0 ce qu'on note : **A = f' (x_0)** .
Dans ce cas, il existe une tangente unique à la courbe au point M (x_0 , f(x_0)) et A est son coefficient directeur.

De cette définition nous tirons les conséquences suivantes : f n'admet pas de nombre dérivé en l'un des ses points si, en ce point la limite du taux de variation n'existe pas, c'est-à-dire, par exemple :
- Si la limite est infinie (tangente parallèle à l'axe des y)
- Si la limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche (courbes dont le rayon de courbure admet une discontinuité, courbes présentant un point dit « anguleux») .
- Si le taux de variation oscille sans tendre vers une limite (courbe de sin $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0)

3 Si f'(x_0) existe : dans le voisinage immédiat de M (x_0 , f(x_0)), (c'est-à-dire quand x est dans le voisinage immédiat de x_0, très proche de x_0,) courbe et tangente sont pratiquement confondues, ce qui veut dire qu'on peut faire un amalgame entre l'équation de f(x) et l'équation de la tangente, qui est généralement moins compliquée. On dit qu'on procède à une **approximation affine.**
Dans cette région du plan, on peut écrire que A = $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ +ε (ε étant un nombre réel positif ou négatif, très petit et d'autant plus petit que
x_0 – x est petit).
On en déduit que f(x) = f(x_0) + A (x – x_0) + ε(x-x_0) ou f(x) = f(x_0) + f'(x_0) (x – x_0) + ε(x-x_0)
Pour traduire que le dernier terme est négligeable devant les autres, on l'écrit ε(x-x_0) = o(x-x_0)
o fonction de (x – x_0) très petite . Ce qui donne finalement
f(x) = f(x_0) + f'(x_0) (x – x_0) + o(x-x_0) Développement limité de f(x) au voisinage de x_0.
Remarquons qu'au terme o(x-x_0) prés, c'est l'équation d'une droite de coefficient directeur f'(x_0).
D'où le terme d' « approximation affine ». o(x-x_0) est **l'erreur** commise dans l'approximation.

Fonctions dérivables, fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **dérivable** sur un intervalle] a , b[si elle admet un nombre dérivé en tout point de] a,b [. (On prend un intervalle ouvert pour éviter les problèmes en a et b) .
La même définition peut s'appliquer sur Df , le domaine de définition de la fonction. Quand f est dérivable sur Df, on dit simplement que f est dérivable.

● Si une fonction est non définie ou non continue en x_0 , il est exclu de parler de dérivabilité en ce point. Par contre, la notion de dérivabilité retrouve un sens quand f est prolongée en continuité en x_0.
On démontre que :
Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0
Attention : la réciproque n'est pas vraie : il est possible (mais ce n'est pas un cas courant) de construire des fonctions continues qui n'admettent pas de dérivée, la fonction étant très « instable » en tous lieux et à toutes les échelles. C'est le cas notamment des fonctions dont le graphe est appelé « fractale ».

● Nous avons vu d'autres cas de non dérivabilité repérés par l'étude de la limite du taux de variation de f quand $x \to x_0$:
points anguleux : limite à gauche ≠ limite à droite (pour $x \to |x|$ en x = 0),
limite infinie (pour $x \to \sqrt{|x|}$ en x = 0) ,
limite non existante car f très instable . (pour $x \to \sin\frac{1}{x}$ prolongée en continuité en 0)

Dans le domaine de dérivabilité d'une fonction, on peut définir la fonction **x → f '(x)** comme la **fonction dérivée de f**.
Quelquefois, l'expression de f'(x) nous permet de repérer des limites infinies et donc de restreindre le domaine de dérivabilité par rapport à Df , bien que le procédé ne soit pas trop orthodoxe.

Autres notations de la fonction dérivée :

● En appelant ($f(x_0) - f(x)$) : Δf et ($x_0 - x$) : Δx on a $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Quand Δx devient très petit, on peut considérer qu'il prend une valeur idéalement petite dx appelée différentielle de x (indépendante de x) et il lui correspond une différentielle de f (contraction de Δf) qu'on nomme df (fonction de x) .
De ce point de vue, on peut considérer que $f'(x) = \frac{df}{dx}$. C'est la notation différentielle de Leibnitz.

● Quand f est une fonction de plusieurs variables, par exemple f(x,y,z) dans un domaine où (par exemple) y et z restent constants f(x,y,z) est une fonction de x dont on peut calculer la dérivée, qu'on note $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$.

C'est ce qu'on appelle une dérivée partielle, parce qu'il existe une conception plus large de la dérivée de f(x,y,z), quand aucune des 3 variables x, y , z n'est constante.

Règles de calcul des fonctions dérivées

On connaît les dérivées des fonctions usuelles x , x^n , 1/x , sin x , cos x , ln x , e^x , ….
On connaît le mécanisme qui permet de calculer à partir des dérivées de f et de g
les dérivées de λf , $f + \lambda$, f + g , fg , f / g
les dérivées de $f \circ g$ ou de f^{-1}
À partir de là, il y a très peu de fonctions courantes dont on ne sache pas calculer la dérivée.
Mais peut être est – il nécessaire de faire une petite piqûre de rappel ?

Dérivées des fonctions usuelles

X^n ($n \in N$)	nX^{n-1}	**$Log_a\, x$**	1 / (x ln a)	**Cotan x**	$-1-\cot an^2 x$
X^α ($\alpha \in R$)	$\alpha X^{\alpha-1}$	**Cos x**	– sin x	**Cotan x**	$-1 / \sin^2 x$
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$	**Sin x**	Cos x	**Arc cos x**	$-1 / \sqrt{1-x^2}$
a^x ($a \in R^{+*}$)	$a^x \ln a$	**Tan x**	$1 + \tan^2 x$	**Arc sin x**	$1 / \sqrt{1-x^2}$
ln |x|	1/x	**Tan x**	$1 / \cos^2 x$	**Arc tan x**	$1/ (1+x^2)$

Cosinus, sinus, tangente hyperboliques

Définitions :

À rapprocher de la définition de cos, sin, tan à partir des nombres complexes R $e^{i\theta}$

● Ch x = $\frac{e^x+e^{-x}$}{2}$ ● Sh x = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ● Th x = $\frac{shx}{chx} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

À rapprocher des formules clés de la trigonométrie :

● ch^2 x – sh^2 x = 1 ● sh(a+b)=sh a ch b + ch a sh b ● ch (a + b) =ch a ch b + sha shb

Fonctions réciproques :

● Arg sh x = ln (x + $\sqrt{1+x^2}$) ● Arg ch x = ln (x + $\sqrt{x^2-1}$) ● Arg th x = $\frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$

Dérivées :

Ch x	Sh x	Arg ch x	$1 \ / \ \sqrt{x^2-1}$
Sh x	Ch x	Arg sh x	$1 / \ \sqrt{x^2+1}$
Th x	1 / ch^2x 1 – th^2x	Arg th x	1 / (1 – x^2)
Coth x	– 1 / sh^2 x 1 – $coth^2$ x		

Opérations sur les fonctions et dérivées correspondantes :

● Constante K’ = 0 (K constante)

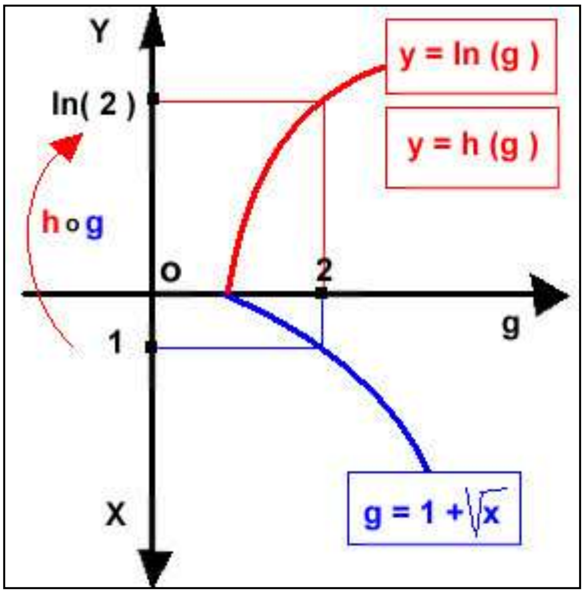
● Somme (f + g) ‘ = f’ + g’

● Produit (fg)’ = f’g + g’f si K est une constante (K f)’ = K f’

● Quotient $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

●$(x^n)' = nx^{n-1}$ ● $(\sqrt{x})' = (x^{½})' = (1/2)\, x^{-½}$ ∗ $(1/x)' = (x^{-1})' = -1\, x^{-2} = -1 / x^2$

Fonctions composées



Dans un double repère (très inhabituel) on a représenté :

●Dans le 4e quadrant la fonction g définie sur R^+ : x → g (x) =1+$\sqrt{x}$

L’image de R^+ par cette fonction est [1 ; +∞)

● Dans le 1e quadrant la fonction h : g → h(g) = ln g . C’est la restriction à

[1 ; +∞) de x → ln x . Ce qui signifie que leurs graphes coïncident sur [1 ; +∞).

● Si on veut connaître la valeur de f(x) = ln (1+$\sqrt{x}$) , il faut partir de la valeur de x sur l’axe des x et suivre le trajet qui est tracé en bleu puis en rouge sur le dessin

1 → (1,2) sur le graphe de g

→ 2 sur l’axe des g

→ (2 , ln 2) sur le graphe de h

→ ln 2 sur l’axe des y . f(1) = ln 2.

En fait, ce processus correspond à la composition des 2 fonctions

f = h ∘ g ou **f(x) = h(g(x))**

● Si on construisait directement le graphe de y = f (x) = ln (1+$\sqrt{x}$) , il serait évidemment différent du graphe de ln (g) car l’axe des abscisses serait « gradué en x » alors que dans notre dessin, il est « gradué en g » qui est déjà le résultat de l’application d’une fonction à la variable x

Si j’écris f(x) = ln (1+$\sqrt{x}$) f peut être indifféremment considérée comme une fonction de x ou comme une fonction de g si on pose g(x) : x → 1+$\sqrt{x}$ et h(x) : x → ln x on peut écrire f(x) = h (g(x)) = h ∘ g (x) = ln (g(x)) .

Ecrire f(x) = ln (g(x)) revient à considérer f comme une fonction de g. Mais attention , cette fonction n’est pas f(g(x)) car en toute logique f(g(x)) devrait être la fonction x →ln (1+$\sqrt{g(x)}$). On peut par contre écrire f (x)= h(g(x)) .

Si on considère f comme une fonction de x , f(x) = ln (1+$\sqrt{x}$) admet pour dérivée f’(x) , la dérivée cherchée .

Si on considère f comme une fonction de g, f(g) = ln (g) , c’est qu’on a procédé au changement de variable g = 1+$\sqrt{x}$ et dans le nouveau repère, f (g) admet aussi une dérivée par rapport à g : f’(g) = $\frac{1}{g}$

Pour distinguer ces 2 dérivées on peut les appeler f'(x) ou f'(g) qu'on lira respectivement dérivée de f par rapport à x et dérivée de f par rapport à g , cette dernière écriture supposant que dans f on considère g comme une variable, alors qu'il s'agit en réalité d'une fonction de x.
On a donc fait un changement de variable x → g = 1+$\sqrt{x}$
Dans la figure qui illustre ce paragraphe, si on écrit f : x →f(x)=ln (1+$\sqrt{x}$) puis f (g) = ln (g) en posant g =1+$\sqrt{x}$,

● la dérivée de la fonction bleue x → g (x) = 1+$\sqrt{x}$ est g' (x) c'est-à-dire $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

● et la dérivée de la fonction rouge f(g) : g → ln g est f'(g) c'est-à-dire $\frac{1}{g}$

On va démontrer que si dans f(x) on fait le changement de variable g = g(x) alors **f'(x) = f'(g) . g'(x)**
On a $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g} . \frac{\Delta g}{\Delta x}$ d'où on déduit par passage aux limites que **f ' (x) = f ' (g) . g' (x)**

Et si on fait le changement de variable inverse dans f'(g) : g → x : **f' (x) = f ' (g (x)) . g' (x)**
Et comme la composition de deux fonctions peut être assimilée à un changement de variable :
Si f = h ○ g : f' (x) = h ' (g) . g' (x) avec h'(g) = f'(g) dans le précédent changement de variable (puisque h(g) = ln (g) et f(g) = ln (g) dans notre exemple) et donc **f'(x) = h'(g(x)). g'(x)**

● Par **exemple** on cherche la dérivée de $(2X^2 + 3)^5$. on pose g = $(2X^2 + 3)$ et on a f = g^5 .
On dérive f par rapport à g on trouve 5 g^4 . On dérive g par rapport à X on trouve 4X .
On multiplie les 2 dérivées : 4X (5 g^4) = 20X $(2X^2+3)^4$. C'est la dérivée cherchée.

● Autre **exemple** : on cherche la dérivée de ln f(x) sachant que la dérivée de ln (x) est 1/x
Avec la loi de dérivation des fonctions composées on trouve (ln f) ' = $\frac{f'}{f}$ (à retenir)

● de la même façon $(e^f)' = f' e^f$ ● $(\sin (x^2))' = 2X \sin (x^2)$ ● si x > 0 : $((\sqrt{x^3})' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$

Dérivée de la fonction réciproque :

Supposons f bijective sur Df à valeurs dans f(Df) . f est dérivable sur Df et sa dérivée est f'(x).
f admet une fonction réciproque, elle aussi dérivable sur f(Df) qu'on note f^{-1} (x) et qui admet pour dérivée $(f^{-1})'$ (x) .
Par définition de la fonction réciproque, si y = f(x) on a **x = f^{-1} (y)** et donc **x = f^{-1} (f(x))** qui est une fonction composée I = $f^{-1} \circ f$. On a donc x en fonction de y et y en fonction de x
Si on dérive x = f(y) par rapport à x on trouve **x'(x) = 1 = x'(y) . y'(x)** (fonction composée)

Il faut lire x' (y) comme « la dérivée que nous cherchons, dérivée de f^{-1}, par rapport à y » .
On connaît y'(x) qui est la dérivée f'(x) . On s'arrange pour exprimer y'(x) en fonction de y :
et on obtient x'(y) en fonction de y qui est la dérivée cherchée , mais en fonction de y au lieu de x.

Exemple 1 : On cherche la dérivée de arc cos (x). Prenons y = f(x) = cos x
●(E) : x = arc cos y
● dérivons (E) par rapport à x : 1 = **arc cos'(y)** . y ' (x) donc 1 = **arc cos ' (y)** . (- sin x)
● remplaçons – sin x par sa valeur en fonction de y = cos x on obtient – sin x = – $\sqrt{1 - \cos^2 x}$
1 = **arc cos'(y)** (-1$\sqrt{1-y^2}$) on en déduit que **arc cos'(y)** = $\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ (expression finale)
Ou, ce qui revient au même : **(arc cos) ' (x)** = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui est la dérivée cherchée.

Exemple 2 : On cherche la dérivée de e^x sachant que si y = ln x on a (E) : **x = e^y** .
Dérivons (E) par rapport à x : 1 = **$(e^y)'$ (y)** . y'(x) = **$(e^y)'$ (y)** . $\frac{1}{x}$ et comme x = e^y : 1 = **$(e^y)'$ (y)** . $\frac{1}{e^y}$
D'où on tire **$(e^y)'$ (y) = e^y** (la dérivée de e^y par rapport à y est e^y)
La dérivée de e^x par rapport à x est donc e^x .
Le processus de calcul est moins compliqué que la formule $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ne le laisse supposer.

Dérivées d'ordre supérieur

● la dérivée de f si elle existe est notée f' ou $f^{(1)}$. On dit qu'elle est d'ordre 1

● la dérivée de f' si elle existe est notée f'' ou $f^{(2)}$. On dit qu'elle est d'ordre 2

Et ainsi de suite …

Si la dérivée d'ordre k existe et qu'elle est dérivable on note $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

Par extension on dit que $f = f^0$.

En notation différentielle on considère que $\frac{d}{dx}$ est un opérateur de dérivation par rapport à x .

On devrait donc noter la dérivée seconde $\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}$ mais par soucis de simplification on l'écrit $\frac{d^2f}{dx^2}$

Exemple si f : x → x^p alors avec n < p $f^{(n)} = p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-n+1)\,x^{p-n}$

Notion de classe

On dit que f ∈ $\mathbf{C^n}$ (**classe n**) si f est n fois dérivable sur E et que $f^{(n)}$ est continue sur E .

Si f ∈ $\mathbf{C^0}$ elle est continue et pas nécessairement dérivable.

Si f ∈ $\mathbf{D^n}$ elle est n fois dérivables mais f $^{(n)}$ n'est pas forcément continue

Rappelons que f dérivable impliquant f continue, les dérivées d'ordre inférieur à l'ordre de la classe sont forcément continues.

$\mathbf{C^\infty}$ est la classe des fonction pour lesquelles $\mathbf{C^n}$ existe quel que soit **n**

C'est le cas de beaucoup de fonction usuelles (les polynômes finissent par donner une constante non nulle puis 0, mais f = 0 est une fonction dérivable de dérivée 0)

● **f bijective** : Si f ∈ $\mathbf{C^n}$ et f '(0) ≠ 0 alors f^{-1} ∈ $\mathbf{C^n}$

Formule de Leibnitz

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(n-k)} g^{(k)}$ à rapprocher du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k$

Rappelons que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $C_n^0 = 1$ par convention

et que pour n entier naturel, n ! = n (n–1)(n-2) …..(2)(1) avec 0 ! = 1 par convention

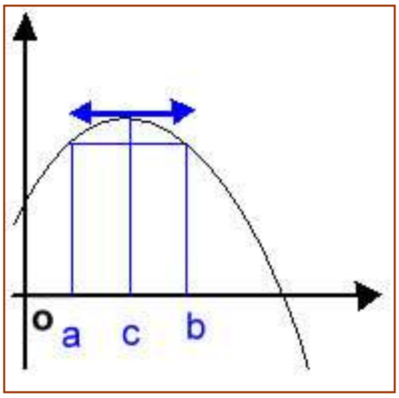
N ↓ P→	0	1	2	3	4
1	**1**	**1**			
2	**1**	**2**	**1**		
3	**1**	**3**	**3**	**1**	
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**

Le triangle de Pascal pour obtenir facilement C_n^p en fonction de n et p.
On écrit 1 , 1 sur la première ligne . Puis, chaque ligne contient une case de plus que la précédente, commence par 1 et finit par 1 , les cases intermédiaires sont obtenues par addition de 2 cases de la ligne supérieure (celle qui est immédiatement au dessus de la case à remplir et celle qui est à sa gauche). On peut poursuivre pour n et p = 5, 6, etc ..

Exemple $(fg)^{(3)} = \mathbf{1}.f^{(3)}.g + \mathbf{3}.f^{(2)}.g^{(1)} + \mathbf{3}.f^{(1)}.g^{(2)} + \mathbf{1}.f.g^{(3)}$. (ligne **N = 3** du tableau)

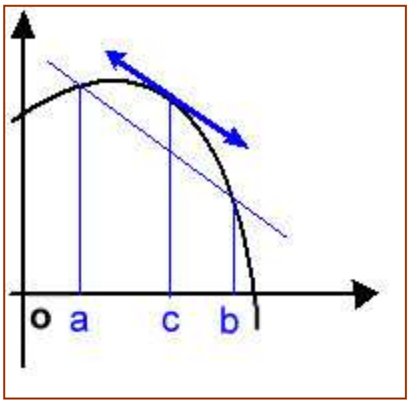
Propriétés des fonctions dérivables

Lemme de Rolle



f continue sur [a ; b] et dérivable sur] a ; b [telle que f(a) = f(b)
Alors, il existe un nombre c sur] a ; b [tel que f'(c) = 0
Autrement dit , il y a un point sur] a ; b [où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x .
Si f est constante, le résultat est trivial, si elle n'est pas constante, elle admet un maximum ou un minimum sur l'intervalle. Donc une tangente // Ox .

Accroissements finis



f continue sur [a ; b] et dérivable sur] a ; b [
Il existe sur] a ; b [une tangente parallèle au segment de droite qui joint les points (a ; f(a) et (b ; f(b)) . Autrement dit, il existe entre a et b un nombre c tels que
f'(c) = $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ (coefficients directeurs des 2 droites parallèles)

Conséquence sur les variations de f

Supposons la dérivée de f positive sur] a ; b [.
Quels que soient x_1 et $x_2 \in$] a ; b [, il existe un nombre c $\in$] x_1 ; x_2[tel que $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ = f'(c)
et comme f'(c) est positif par hypothèse ,
$f(x_1) - f(x_2)$ est du même signe que $x_1 - x_2$ ce qui est la définition même d'une fonction croissante.

Continuité de la dérivée f '

f continue sur [a ; b] et dérivable sur] a ; b [. f ' est – elle continue ?
Soit $x_0 \in$] a ; b [, f' est continue en x_0 si lim f'(x) quand x $\rightarrow x_0$ existe et est égale à $f'(x_0)$
Appelons T (x_0 , x) le taux de variation de f : [$f(x_0)$ – f(x)] / [x_0 – x]
du moment que f est dérivable, il a une limite quand x $\rightarrow x_0$ et cette limite est $f'(x_0)$.
À tout x correspond une valeur c(x) comprise entre x_0 et x telle que f'(c(x)) = T (x_0 , x)
Mais quand T (x_0 , x) est très proche de $f'(x_0)$ ce n'est pas parce qu'il existe un point c entre x_0 et x tel que f'(c) soit aussi proche de $f'(x_0)$ que T(x_0 , x) que c'est le cas de tous les points entre x_0 et x.
La fonction f peut être relativement stable et la fonction f' très instable. Donc, il n'est pas sûr que $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe et soit la limite des f'(c(x)) définis comme précédemment .

Donc : **il n'est pas sur que la fonction dérivée soit continue**.
Ceci dit, si $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe, les deux limites sont bien sûr égales.

On peut avoir la même discussion quand on prend x_0 = a (ou b) .

Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe et est finie alors f est dérivable à droite et $\lim_{x \to a} f'(x)$ =f'(a)

Si $\lim_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$ f n'est pas dérivable en a et f'(a) n'existe pas (exemple de 1 / x en 0)

● Mais il existe des fonctions partout dérivables comme $x^2 \sin(1/x^2)$ prolongée en continuité en 0 dont la fonction dérivée n'admet pas de limite quand x $\rightarrow$ a (ici a = 0)

1) on fait le changement de variable u = 1/x et on obtient f(u) = $(\sin u^2) / u^2$.
Quand x $\rightarrow$ 0 , u $\rightarrow \infty$ et donc à la limite f(u) $\rightarrow$ 0 . On peut donc écrire f(0) = 0
2) f est dérivable en 0 si $\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right)$ existe et est finie . Or f(x)/x = x $\sin(1/x^2)$

ce qui par le même changement de variable que précédemment donne $(\sin u^2) / u$ qui tend vers 0 quand u $\rightarrow \infty$.
On peut donc écrire que f'(0) = 0 . Donc f est partout dérivable.
3) La dérivée de f est f'(x) = 2x $\sin(1/x^2) - \cos(1/x^2)$ / x et on a vu que quand x $\rightarrow$0 , le 1[er] terme tend vers 0 . Mais p
très voisin de 0 on peut le rendre aussi grand que l'on veut dans l'intervalle E =[0 , α] , puisque dans E , il existe ur
petites que l'on veut pour lesquelles le cosinus est égal à 1 et donc le second terme égal à 1/x .
Donc, f' ne peut avoir en 0 une limite finie et **f continue et partout dérivable ne signifie pas que f' est continue**.

Calcul de certaines limites

Des expressions telles que f(x) = $\frac{e^x-1}{x}$ ou g(x) = $\frac{\sin x}{x}$ peuvent être transformées en :
f(x) = $\frac{e^x-e^0}{x-0}$ ou g(x) = $\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$ et on reconnaît un T(0,x) dont la limite quand x $\rightarrow$ 0 donne un nombre dérivé

$\lim\limits_{x\to 0}$f(x) = $(e^x)'(0) = e^0 = 1$ ou $\lim\limits_{x\to 0}$g(x) = (sin x)'(0) = cos (0) = 1

C'est donc un moyen de calculer ces limites à bon compte, en les amalgamant à des nombres dérivés.

L'inégalité des accroissements finis

Si f est dérivable sur] a ; b [et que f' est continue sur cet intervalle .
De f' continue on tire f' bornée sur] a ; b [et donc m $\leqslant$ f' $\leqslant$ M
(m et M sont déduits de l'étude des variations de f'(x) sur] a ; b [ )
Du théorème des accroissements finis, on déduit : m $\leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant$ M

Et finalement, comme b – a est positif : **m (b – a) $\leqslant$ f(b) – f(a) $\leqslant$ M (b – a)**

● Dans le même ordre d'idée :
f **lipschitzienne** si **| f(x) – f(y)| ≤ K | x –y|** (**contractante** si K < 1)

● **Exemples d'utilité** : on connaît m , M et f(0) = 0 on peut écrire m x ≤ f(x) ≤ M x
(ln x)' = 1/x et pour x$\in$ [1 , +∞) **0 < 1/x $\leqslant$ 1** et **ln (1) = 0** d'où 0 (x–1) ≤ ln x ≤ 1(x –1) ou **ln x ≤ x**

Formules d'ordre 1 de Mac Laurin et de Taylor

Si f est une fonction de classe C^1 (dérivable , dérivée continue)
De f'(c) = $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ on déduit qu'il existe un nombre θ tel que 0< θ < 1 et c = θ x ce qui donne

Pour tout x $\in$ [0 ; x] : f(x) = f(0) + x f'(θ x) Mac Laurin
Pour tout x $\in$ [a ; x] : f(x) = f(a) + (x–a) f' (a + θ (x–a)) Taylor
À rapprocher du développement limité d'ordre 1 au voisinage immédiat de a :
f(x) = f(a) + (x–a)f'(a) + o(x-a) si θ (x–a) est négligeable

Formules générales de Mac Laurin et de Taylor

Si **f** $\in$ **C^n** et que **$f^{(n)}$** est dérivable . Avec **0 < θ < 1** on a

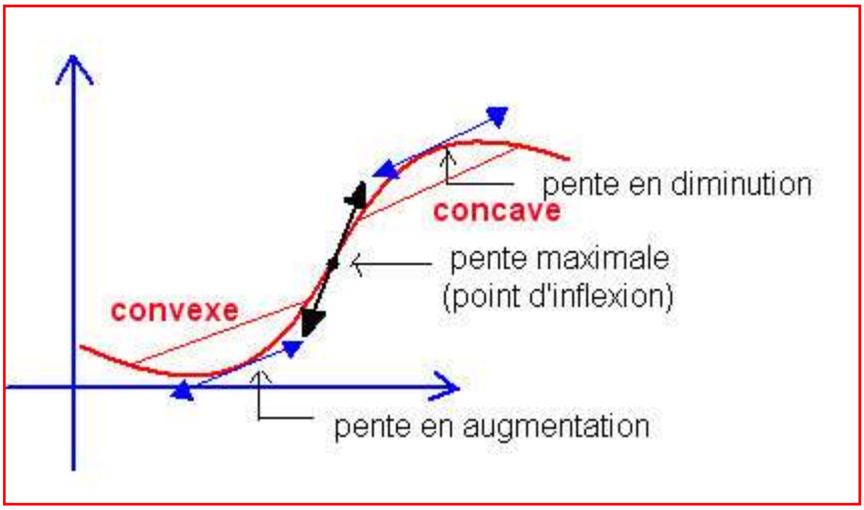
Ne peut être négligé à priori

$f(a+h) = f(a) + hf^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{n+1!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$ **Taylor**

$f(h) = f(0) + hf^{(1)}(0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{n+1!}f^{(n+1)}(\theta h)$ **Mac Laurin** (a = 0)

Utilisation géométrique de la dérivée seconde

Fonctions de la classe $\mathbf{C^2}$



f '' >0 équivaut à **f '** croissante (la pente de la tangente augmente)

f concave : graphe en dessus des sécantes **f ''** < 0 pente diminue
f convexe : graphe en dessous des sécantes **f ''** > 0 pente augmente
Point d'inflexion : **f ''** = 0 (tg pas forcément horizontale)

Si **f** convexe : **f '** augmente entre x et y alors **f '** est majorée par **f '(y)**
On en déduit (accroissements finis) que si X et Y appartiennent à une portion convexe et C entre X et Y :

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$$

Plus précisément, **sur une partie convexe du graphe, toute sécante AB (B à droite de A) a un coefficient directeur inférieur ou égal à celui de la tangente en B.**

Remarquons que dans la langue courante on dirait plutôt au sujet d'un relief qu'un trou est concave et une montagne convexe (est concave ce qui est creux et convexe ce qui est bombé) .
En mathématiques, si on assimile (abusivement) l'axe des x au niveau horizontal, c'est plutôt le contraire : ce qui tend à dominer l'horizontale est concave et ce qui tend à passer sous l'horizontale est convexe.
Mais bon, ne prenez pas cette remarque au pied de la lettre et examinez plutôt la position relative des sécantes et de la courbe.
Remarquons aussi que la fonction dérivée peut très bien être décroissante avant le point d'inflexion et croissante après.