SERIES

Table des matières

Vocabulaire et définitions

Soit la suite $\mathbf{U}_i$ avec i ∊ ℕ.
La somme de l'ensemble ou partie de ses termes forme une Série.
- Par $\mathbf{S_n} = \sum \mathbf{U_i}$ on entend somme des U_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
- Par $\mathbf{R(S_n)}$ **ou** $\mathbf{R(\sum U_n)}$ on entend $\sum \mathbf{U_i}$ pour $n+1 \leqslant i < \infty$ (reste d'ordre n)
- Sn est dite **alternée** si le signe de U_i change selon une loi de type $(-1)^i$

Certaines séries ne sont définies qu'à partir d'un certain rang :
$\frac{1}{n^\alpha}$ série de Riemann dont $\frac{1}{n}$ série harmonique pour n ≥ 1
$\frac{1}{n(ln(n))^\alpha}$ série de Bertrand pour n ≥ 2
- Par **lim $\mathbf{S_n}$ = S** , sauf précision il faut entendre
  lim s_n quand $n \to +\infty$ = S
- Une série est convergente (divergente) quand S_n, considérée comme une suite, est convergente (divergente) . Dans ce cas, il existe un nombre S fini tel que lim S_n = S
- On défini la série somme à partir de deux séries $(S + T)_n = S_n + T_n$
- on définit la série $(\lambda S)_n = \lambda S_n$
- on définit le **produit de Cauchy** de 2 série par Wn = $\sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k}$ W4=U0V4+U1V3+U2V2+U3V1+U4V0
- Doté de ces deux lois (l'une interne, l'autre externe) l'ensemble des séries est un espace vectoriel dont le sous ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel. Dans ce sous espace, l'application :

$S_n \to$ lim S_n est une application linéaire.
lim $(S_n + T_n)$ = lim S_n + lim T_n et lim $\lambda S_n = \lambda$ lim S_n.

Série arithmétique $S_n = U_0 + U_1 + ...+ U_{n-1} + U_n$ (n+1 termes)

$S_n = (n+1)\frac{U_0+U_n}{2}$ (produit du nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier)

Série géométrique $S_n = U_0 + U_0Q + U_0Q^2 + ...+ U_0Q^n$ (n + 1 termes)
$S_n = U_0\frac{1-Q^{n+1}}{1-Q}$ on en déduit que pour x≠1 $1+x+x^2+...+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (factorisation de $1-x^n$)

convergence :

- Sn est **convergente** si sa limite existe
- Sn est **absolument convergente** si **Σ |U_i|** est convergente

- Si Un et Vn absolument convergentes leur produit de Cauchy Wn converge et
Lim Wn = (lim Un) x (lim Vn)
- Un convergente ⇒ Lim U_i = 0
- Un convergente ⇒ Tout ε > 0 , ∃ r tel que tout n> r et tout p $|\sum_{i=n}^{i=n+p} U_i| < \varepsilon$ (Cauchy)
- Sn absolument convergente ⇒ Sn convergente
- Sn alternée |Ui| décroissant et $U_i \to 0$ ⇒ Sn convergente

  Σ (1/n) série harmonique ne converge pas

  Σ $(-1)^n(1/n)$ série harmonique alternée converge vers ln 2

  exemple $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Comparaison de séries de réels positifs

- en écrivant Un = f(n). f continue par morceaux $\int_a^{+\infty} f$ converge ⇒ Sn convergente

- Si on peut écrire Un = f(n+1) – f(n) alors Sn = f(n) – f(0). f(n) converge ⇒ S(n) converge

Sans aller jusqu'à l'égalité, il suffit souvent d'encadrer Un grâce aux accroissements finis sur une primitive de f pour majorer et minorer Sn :

f(n) – f(n-1) ⩽ Un ⩽ f(n+1) – f(n)

Σ 1 / n^α série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$

Σ 1 / $n(\ln n)^\alpha$ série de Bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$

- Si pour tout n 0 ⩽ Un ⩽ Vn : ΣVn converge ⇒ ΣUn converge et
  ΣUn diverge ⇒ ΣVn diverge

- Si quand n → ∞ , ∃ α > 1 tel que lim n^αUn = 0 et n^αUn bornée , ΣUn converge
  , ∃ α < 1 tel que 1/n^α < Un , ΣUn diverge

- Si deux séries Un et Vn sont de signe constant à partir d'un certain rang et qu'à l'infini on ait Un ≈ Vn , (Un équivalent à Vn) les 2 séries sont de même nature.

On peut utiliser les développements limités à l'infini.

Exemple : 1/ n^2 ≈ 1/ n – 1 / (n–1) . le reste de rang n tend vers 1 / n

- Si deux séries Un et Vn sont de signe positif à partir d'un certain rang et qu'à l'infini on ait $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$

alors Un diverge ⇒ ΣVn diverge et ΣVn converge ⇒ ΣUn converge

Dans ce dernier cas, R(ΣUn) ⩽ $\frac{Un}{Vn}$R(ΣVn)

● règle de d'Alembert .

◙ Si à partir d'un certain rang, il existe K tel que 0 < K < 1 et $\frac{U_{n+1}}{U_n} < K$

alors ΣUn converge et R(ΣUn) ⩽ $\frac{K}{1-K}$Un.

◙ Si K >1 et $\frac{U_{n+1}}{U_n} > K$ alors ΣUn diverge

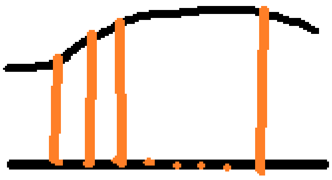
◙ la règle reste valable si on prend K = lim $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ (pour K = 1 , on ne peut rien dire)

- Séries et développements limités sont souvent imbriqués .

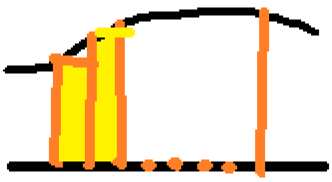
Limites calculables par intégration.

Soient 2 points d'abscisse respective a et b sur l'axe des x.
Posons b – a = D

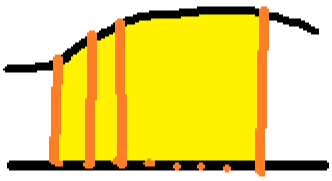
Quand on partage le segment en n segments égaux on obtient les points d'abscisses a , a+$\frac{D}{n}$, $a+\frac{2D}{n}$,…., $a+\frac{nD}{n}$



Si on écrit
$\sum_{k=0}^{n} f(a+\frac{kD}{n})$ on obtient la somme algébrique des mesures des segments désignés en rouge sur le dessin mais ça ne veut pas dire grand-chose.



Par contre si on a un facteur $\frac{1}{n}$ devant la somme Un= $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a+\frac{kD}{n})$
On peut dire que Un =$\frac{1}{D}$ ($\frac{D}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a+\frac{kD}{n})$) et $\frac{D}{n}$ étant la base des n rectangles colorés en jaune qui majorent ou minorent l'aire de la courbe …
Ça commence à ressembler à quelque chose.



Quand on fait tendre n vers ∞, $\frac{D}{n}$ devient dx, la somme devient intégrale
Et Un ⟶ $\frac{1}{D}\int_a^b f(x)dx$

C'est un procédé de calcul de limite qu'on peut appliquer à certains cas de suites

Par exemple quand n ⟶ ∞…

(d) $\ln(1+\frac{\pi}{n})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$,

si n ⟶ ∞
le ln ⟶ $\frac{\pi}{n}$ et l'argument du cos est [0,3π] divisé par n.

(e) $\frac{\pi}{n}(\sin(\pi/n)+\sin(2\pi/n)+\ldots+\sin((n-1)\pi/n))$,

(h) $\sin(\frac{\pi}{n})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(\frac{k\pi}{n})}$, Qd n ⟶∞ le sinus tend vers $\frac{\pi}{n}$

Et il y en a d'autres permettant de se ramener à ce cas par une transformation.

Par exemple ici en prenant
Ln(Un) on doit obtenir un truc qui ressemble à

$\sqrt[n]{(1+(1/n)^2)(1+(2/n)^2)\ldots(1+(n/n)^2)}$,

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(1+(\frac{k}{n})^2)$ c'est l'intervalle [0,1] qui a été découpé en n segments égaux de largeur $\frac{1}{n}$

Ln(Un) ⟶ $\int_0^1 ln(1+x^2)dx$ = $[\mathrm{xln}(1+x^2)-2\mathrm{x}+2\mathrm{arctan(x)}]_0^1$

Avec un terme de type $\sum_k\sqrt{A-\frac{k^2}{n^2}}$ transformer en $\sum_k\sqrt{1-\frac{k^2}{An^2}}$ et faire l'amalgame avec $\sum_k\sqrt{1-sin^2(\frac{k}{Bn})}$