POLYNOMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Définition, ensemble des polynômes sur R R[X], divisibilité, division euclidienne, idéaux de R[X], division selon les puissances croissantes.
Fonctions rationnelles, corps des fonctions rationnelles, décomposition en éléments simples, méthodes et exemples.

Le polynôme **$P=a_nX^n + \ldots..+a_1X + a_0$** peut être considéré comme un vecteur de **coordonnées** **$(a_n, \ldots..,a_0)$** dans la **base** **$\{X^n, \ldots,X, 1\}$** elle-même formée de polynômes qu'on appelle **monômes**.
Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble de polynômes de **degré** ≤ n constitue un **espace vectoriel**
Qui est lui-même un sous espace vectoriel de l'ensemble des polynômes de degré ≤ n+1.
Par récurrence, on peut considérer l'ensemble des polynômes comme un espace vectoriel de dimension infinie qu'on appelle
R[X] ensemble des polynômes à coefficients réels.
Doté de l'addition et de la multiplication des polynômes R[X] a une **structure d'anneau commutatif unitaire** :
(R[X] , +) est un groupe commutatif. Distributivité du produit par rapport à +.
Produit commutatif et 1 = **polynôme unité**.
Le **polynôme nul** est celui dont les coefficients sont nuls.

- Les seuls polynômes inversibles sont de la forme $a_0 = \lambda$ réel non nul .
- On appelle **valuation** de P le plus petit n pour lequel a_n est non nul (x^3+5x^2 a pour valuation 2)
- On appelle **monôme dominant** de P son monôme de plus haut degré a_nX^n
- Si $a_n = 1$ on dit que le polynôme est **unitaire**.

Divisibilité

Un polynôme B divise un polynôme A si il existe un polynôme Q tel que A = BQ

Exemple : On peut écrire $X^n – a^n = (X–a) (X^{n–1} + aX^{n–2} + \ldots+a^{n–2}X + a^{n–1})$

$X^{2n+1} + a^{2n+1} = (X+a) (X^{2n} – aX^{2n–1} + a^2X^{2n–2}–\ldots–a^{2n–1}X + a^{2n})$

Mais $X^{2n}+a^{2n}$ n'est pas divisible par X+a
Dans R[X] , on a αA divise A et A divise αA donc le relation de divisibilité n'est pas antisymétrique.
Dans l'ensemble des polynômes unitaires αA n'existe pas et la divisibilité est une relation d'ordre.

Division euclidienne de A par B

Il existe 2 polynômes Q et R uniques tels que **A = BQ + R** et **degré de R < degré de Q**
Si le degré de B est plus grand que le degré de B , alors Q = 0 et R = A .
Il faut, bien sûr que B ne soit pas nul .

Cette division s'effectue comme celle des décimaux :

X^4 • • • $+1$	$X^2 +X +1$
X^4 $+X^3$ $+X^2$	$X^2 – X$
$–X^3$ $–X^2$ •	
$–X^3$ $–X^2$ $–X$	
X $+1$	

En X^4 combien de fois X^2 ? → X^2
J'écris X^2 fois (X^2 +X + 1 à gauche).
Je soustrais (X^4 $+X^3$ $+X^2$) à (X^4 • •)
J'écris le résultat à la ligne suivante ($-X^3$ $–X^2$)
Je descends •

Je peux écrire $X^4 + 1 = (X^2 + X + 1) (X^2 – X) + (X+1)$

Idéaux J de l'anneau R[X]

(J , +) est un sous groupe de (R[X], +) et, tout P $\in$ J et tout p $\in$R{X] : Pp $\in$ J et pP $\in$ J
Donc l'ensemble J des multiples de A donné est un idéal.
Pour A et B donnés, l'ensemble J des polynômes de la forme pA + p'B est un idéal

Il existe un polynôme unitaire D et un seul tels que J = { ensemble des multiples de D}

On dit que **D engendre J** .
Le degré de D est le plus petit degré des polynômes de J (ce degré existe forcément si J n'est pas vide) . Pour trouver D , il suffit de prendre un polynôme A de degré minimal de J et de le diviser par a_n son coefficient dominant. Si A $\in$ J c'est aussi forcément le cas de D d'après la définition d'un idéal.
Soit A $\in$J , sa division euclidienne par D donne A = DQ + R comme A et DQ $\in$J c'est aussi le cas de A – DQ = R et comme R ne peut pas être de degré inférieur à celui de D on a R = 0.
Tous les polynômes de J sont donc divisibles par D et l'unicité de D coule de source.

● Soit J = { pA + p'B, quels que soient p$\in$R[x] et p'$\in$R[x] }
Alors, A $\in$J et B$\in$J . Si D unitaire engendre J alors A et B sont des multiples de D .
Si il existe un polynôme unitaire D' de degré supérieur à celui de D tel que A et B soient des multiples de D' alors D' engendre J ce qui est contradictoire avec l'unicité de D .
D est donc le PGCD de A et de B (ou plutôt le diviseur de plus haut degré commun à A et B)
Comme D $\in$J, D peut être écrit sous la forme pA +p'B et en particulier,

si A et B sont **premiers entre eux**, il existe 2 polynôme p et p' tels que **pA +p'B = 1** (Th de BEZOUT)

ce théorème est aussi vrai pour 2 entiers relatifs premiers entre eux, A et B , p et p' étant dans ce cas des entiers relatifs.
Corollaire évident :

Si A et B premiers entre eux et si A divise BC alors, A divise C

Division selon les puissances croissantes

A et B sont des polynômes. B est de valuation nulle (son coefficient sans X , b_0 , est non nul)
n étant un entier naturel arbitraire, a lors, il existe un couple de polynômes et un seul tel que
A = BQ + RX^{n+1} et **degré de Q $\leq$ n**
R et Q s'appellent quotient et reste d'ordre n de la division selon les puissances croissantes.

Supposons qu'on veuille diviser selon les puissances croissantes X+1 par X^2 +X+1 à l'ordre 4 .
On procède comme pour la division euclidienne après avoir rangé les polynômes par puissances croissantes :

$1 + X$	$1 + X + X^2$
$1 + X + X^2$	$1 - X^2 + X^3$
$-X^2$	
$-X^2 - X^3 - X^4$	
$X^3 + X^4$	
$X^3 + X^4 + X^5$	
$-X^5$	

Il suffit de prendre
$Q = 1 - X^2 + X^3$ et $R = -1$
Pour avoir la relation cherchée
$1 + X = (1 + X + X^2)(1 - X^2 + X^3) + (-1) X^5$
Remarque à l'ordre 3 on aurait eu
R = -X car $-X^5 = (-X).X^4$)
A l'ordre 2 : R = 1+X
car $X^3 + X^4 = (1+X)X^3$.

On ne s'arrête que lorsque la valuation de RX^{n+1} est supérieure à l'ordre souhaité.

fonctions polynomiales

$P(x) : X \rightarrow a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ est appelée fonction polynomiale

a **racine** de P ⇔ $P(a) = 0$ ⇔ P est divisible par $(X - a)$

multiplicité de a racine de P : c'est le plus grand entier n tels que p soit divisible par $(X - a)^n$

On parle de racine **simple** (n = 1), **double** (n = 2), **triple** (n=3) , …

- Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
- Tout polynôme non constant à coefficients dans C admet au moins une racine complexe.
- Dans C la somme des multiplicités des racines est égale au degré du polynôme.
- Quand on sait qu'un polynôme admet une racine rationnelle (p/q) , on peut quelquefois la calculer en remarquant que q divise forcément a_n et p divise forcément a_0. p–q divise P(1) et p+q divise P(–1) ce qui nous fait progresser dans la recherche d'une solution par tâtonnements.

Un calcul facile de P(a)

Dans la division euclidienne de P par (X–a), on a forcément : **$P = (X - a)\,Q + P(a)$**

Si a_n, …. ,a_0 sont les coefficients de P et b_{n-1}, ……b_0 les coefficients de Q, on a entre ces coefficients les relations suivantes :

$a_n = b_{n-1}$ $a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$ $a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}$ ……………………….. $a_0 = P(a) - ab_0$	$b_{n-1} = a_n$ $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$ $b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$ ……………………….. $P(a) = a_0 + ab_0$

Donc, selon le second type de correspondance, on peut de proche en proche calculer b_{n-1}, b_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à P(a), par de simples additions ce qui est plus facile que de calculer les puissances de a , de les multiplier par les coefficients et de les ajouter .

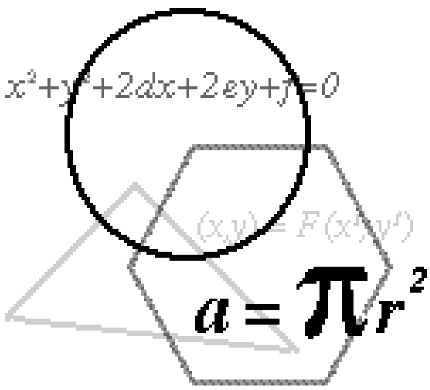
Dérivées et applications

Dérivées d'ordre n . On a notamment ; $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Formule de Taylor :

$$P = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \ldots\ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Peut être considérée comme l'expression de P dans une base { 1, (X–a) , $(X–a)^2$, …, $(X–a)^n$ }



Fractions rationnelles

À partir de l'anneau des polynômes, on construit **le corps** R(X) des fractions rationnelles de type
$\frac{N(x)}{D(x)}$ où N(X)∈ R[X] et D(X) ∈ R[X] avec D(X) ≠ 0

Malgré un risque de confusion avec R[X] on note cet ensemble R(X) pour souligner qu'il est formé à partir de polynômes à coefficients réels. C(X) si les coefficients sont complexes.
Cette fois R(X) contient les polynômes et tout élément non nul est inversible . Y compris les polynômes qui n'étaient pas inversibles dans R[X] sauf quand ils étaient réduits à un entier non nul.
L'inverse de $\frac{N(x)}{D(x)}$ est $\frac{D(x)}{N(x)}$. L'inverse de P(X) est $\frac{1}{P(x)}$.

● On dit qu'un nombre réel **a** est **substituable** dans une fraction rationnelle N/D si D(a) ≠ 0 ou si D(a) = 0 et N(A) = 0. Ce dernier cas permettant de simplifier la fraction par (X – a)
Quand la fraction a été simplifiée de telle sorte que N et D n'aient plus aucune racine commune, sur l'ensemble des éléments substituables dans N/D on définit l'application :
X $\rightarrow \frac{N(x)}{D(x)}$ qu'on appelle **fonction rationnelle**.

Les valeurs qui annulent D(X) sont appelées : **Pôles** de la fraction.

Décomposition en éléments simples

0 Ecrivons P/Q sous une forme irréductible (Q unitaire, P et Q premiers entre eux)

1 Supposons d°(P) ≥ d°(Q)
On peut écrire de manière unique $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ avec E et R polynômes (d°(R) <d°(Q))
Relation équivalente à P=EQ+R ou E est la partie entière et R le reste de la division euclidienne P/Q.Si d°(P) < d°(Q) alors E = 0 et R = P .

3 Supposons d°(P) < d°(Q) (qui pourrait être le R/Q de la précédente décomposition)
Si on peut écrire D sous la forme D = D_1 D_2…D_n , ces facteurs étant unitaires et premiers entre eux deux à deux. Il existe alors des polynômes P_1, P_2 , …P_n tels que l'on puisse écrire :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{D_K}$$

On le démontre d'abord pour n = 2 à partir de BEZOUT $AD_1 + BD_2 = 1$ qu'on multiplie par P/D_1D_2 pour trouver la relation cherchée (B= P_1 et A=P_2). Puis, on procède par récurrence.

4 Si dans chaque PK / DK on sépare la parie entière EK
On a $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{D_K} = \sum_{k=1}^{n}(E_K + \frac{P'_K}{D_K})$ avec d° (P'$_k$) < d°(D_k) et en réduisant au même dénominateur, on trouve que

Σ E_K est la partie entière de P/Q qu'on sait nulle puisque d°(P) < d°(Q).

$\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P'_k}{D_K}$ avec d° (P'$_k$) < d°(D_k) et cette décomposition est **unique**

5 Si on est **dans le corps des complexes**, le théorème de D'Alembert nous dit qu'on peut toujours écrire Q unitaire sous la forme $(X-a_1)^{n1}$ $(X-a_2)^{n2}$…..$(X-a_k)^{nk}$. Les facteurs étant unitaires et premiers 2 à 2, on peut appliquer la décomposition précédente

6 Intéressons nous à un pôle d'ordre p

$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)^p Q_2} = \frac{P_1}{(X-a)^p} + \frac{P_2}{Q_2} + E$ d'où $P = P_1Q_2 + (X-a)^p (P_2+Q_2E)$ avec $d°(P1) < p$

P_1 = quotient de la division de P par Q_2 selon les puissances croissantes de (X-a)
reste (P_2+Q_2E)

Ce quotient s'obtient après le changement de variable Y = X – a dans P et dans Q_2. En pratique, si on a affaire à un pôle d'ordre 3, il suffit de s'intéresser à la division selon les puissances croissantes de Y des 3 termes de plus bas degré de P par les 3 termes de plus bas degré de Q_2.
On trouve $P_1 = b_p + b_{p-1}Y + \ldots + b_1Y^{p-1}$ autrement dit $P_1 = b_p + b_{p-1}(X-a) + \ldots + b_1(X-a)^{p-1}$.
Et enfin $\frac{P_1}{(X-a)^p} = \frac{b_p}{(X-a)^p} + \frac{b_{p-1}}{(X-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(X-a)}$ où **les b_i sont des constantes**

7 Pour un pôle simple on a

$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)Q_2} = \frac{P_1}{(X-a)} + \frac{P_2}{Q_2} + E$ si nous multiplions les 2 membres par (X-a) et que nous faisons X = a ,

il reste $P_1 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}$. C'est ainsi qu'on procède pour trouver P_1. $d°(P1) < 1 \Rightarrow$ **P1 = constante**.

8 Quand il ne reste plus que quelques valeurs, dans la décomposition quasi complète, on peut aussi donner à X des valeurs quelconques qui ne sont pas des pôles et on obtient des équations du 1er degré dont les inconnues sont les valeurs cherchées. Il suffit de substituer X autant de fois que nous avons d'inconnues.

9 Quand nous avons besoin d'une **décomposition réelle** et que nous avons une décomposition complexe, il suffit d'ajouter les fractions où figurent les racines complexes d'un même polynôme (en général conjuguées) et on obtient une fraction à coefficients réels dont le dénominateur est le polynôme sans racine réelle et le numérateur un polynôme de degré inférieur.

Exemple :
Décomposer en éléments simples

$R = \frac{X^6+2}{(X+1)(X^2+1)(X-1)^2}$

On a 2 pôles complexes (i et –i) , un pôle réel simple (–1) , un pôle réel double (1) .

R doit s'écrire $R = E_x + \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+i} + \frac{C}{X-i} + \frac{D}{(X-1)} + \frac{E}{(X-1)^2}$ avec A, B, C, D, E $\in \mathbf{C}$

● Si on avait un pôle triple $(X-a)^3$, on le décomposerait en 3 fractions, ayant pour dénominateur $(X-a)^3$, $(X-a)^2$ et (X–a) .

Calcul de la partie entière E_x

On fait la division Euclidienne de $X^6 +2$ par le dénominateur $X^5 -X^4 -X +1$. On trouve X + 1.
E_x = X +1

● si le degré du dénominateur de R était supérieur à celui du numérateur on aurait $E_X = 0$

Calcul de A Pôle simple

On a $\frac{X^6+2}{(X+1)(X^2+1)(X-1)^2} = E_X + \frac{A}{(X+1)} + \frac{K}{(X^2+1)(X-1)^2}$ avec A constante et K polynôme.

En multipliant les 2 membres par (X+1) et en faisant X = –1 on obtient
A = valeur de $\frac{X^6+2}{(X^2+1)(X-1)^2}$ pour X = –1 soit **A = 3/8**

Calcul de D et E Pôle multiple

On a $\frac{X^6+2}{(X+1)(X^2+1)(X-1)^2} = E_x + \frac{P}{(X-1)^2} + \frac{K}{(X+1)(X^2+1)}$ avec P et K polynômes.

Faisons le changement de variable Y = X –1 ou X = Y + 1
On obtient : $\frac{Y^6+6Y^5+15Y^4+20Y^3+15Y^2+6Y+3}{(Y+2)(Y^2+2Y+2)Y} = E_x + \frac{P}{Y^2} + \frac{K}{(Y^2+2Y+2)(Y+2)}$

P est le quotient suivant les puissances croissantes de Y de ($Y^6+6Y^5+\ldots+6Y+3$) par (Y^2+2Y+2)(Y+2) à l'ordre 1 .
(Y^2+2Y+2)(Y+2) = $4+6Y+4Y^2+Y^3$.
À l'ordre 1 , il est équivalent de diviser 3+6Y par 4+6Y et on trouve P = 3/4 + 3/8Y = 3/4 + 3/8(X–1),
puis en divisant par $(X-1)^2$ on identifie :
D = 3/8 et E = 3/4

Calcul de B et C Pôles complexes

On a $\frac{X^6+2}{(X+1)(X+i)(X-i)(X-1)^2}$ = E_X + $\frac{B}{(X+i)} + \frac{K}{(X-i)(X+1)(X-1)^2}$

En multipliant les 2 membres par (X+i) et en faisant X = -i on trouve :
B = valeur de $\frac{X^6+2}{(X+1)(X-i)(X-1)^2}$ quand X = – i soit (1+ i) / 8 .

C étant la valeur conjuguée de B : **B = (1 + i) / 8 et C = (1 – i) / 8**

En conclusion

Dans $\frac{X^6+2}{(X+1)(X^2+1)(X-1)^2} = x + 1 + \frac{3/8}{X+1} + \frac{(1+i)/8}{X+i} + \frac{(1-i)/8}{X-i} + \frac{3/8}{(X-1)} + \frac{3/4}{(X-1)^2}$

● Eventuellement, nous pouvons regrouper les fractions (2 et 3) autour des pôles complexes pour obtenir une décomposition en fractions à coefficients réels.