MATRICES

Table des matières

Définition

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Une matrice est un ensemble de coefficients groupés en **n** lignes et **p** colonnes.
Chaque coefficient est indicé a_{iJ} où i est l'indice de la ligne et J l'indice de la colonne.
Une matrice est liée à une application linéaire f de E dans F de la façon suivante…
E est de dimension p, F est de dimension n. Le nombre de lignes peut être différent du nombre de colonnes.
Soit {e1; e2; e3} une base de E et {f1;f2;f3} une base de F.
Si tout vecteur de E est exprimé dans la base {e1; e2; e3} et l'image d'un vecteur de E dans la base {f1;f2;f3}
Alors les vecteurs colonnes de la matrice donnent les coordonnées de f(e1), f(e2), f(e3) dans la base de F.
Ici f(e1)=1f1 + 4f2 +7 f3 f(e2) = 2f1+5f2+8f3 f(e3) = 3f1+6f2+9f3.
L'image de (ae1+be2+ce3) de E dans F est donc a(1f1 + 4f2 +7 f3)+b(2f1+5f2+8f3) +c(3f1+6f2+9f3) soit
(1a+2b+3c)f1 +(4a+5b+6c)f2+(7a+8b+9c)f3
↓ ↓ ↓
La $i^{éme}$ composante de l'image de (a,b,c) en base f est le produit scalaire de (a,b,c) par le i^{eme} vecteur ligne

Opérations sur les matrices

Si on note a_{ik} le coefficient figurant à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $k^{ième}$ colonne d'une matrice A , b_{ik} pour la matrice B , c_{ik} pour la matrice C.
Si A , B et C appartiennent à **l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes** (M_{np})on définit les opérations suivantes :

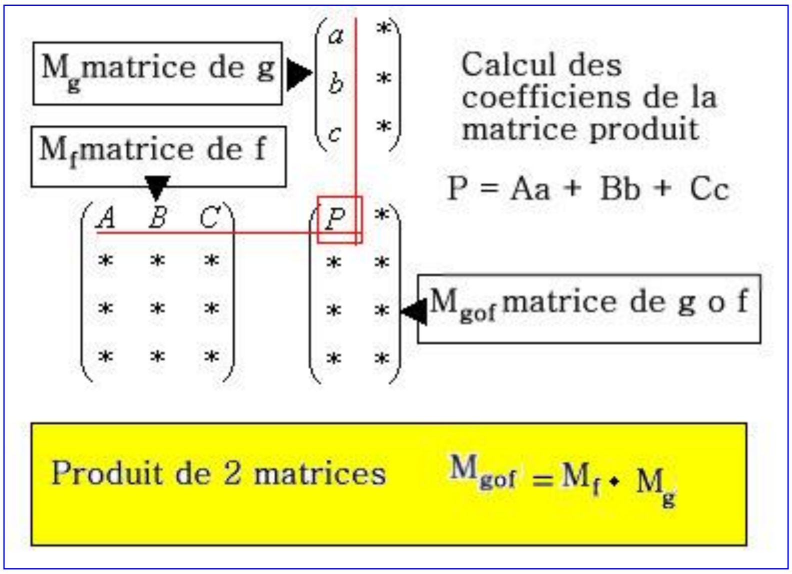
● **addition** **C = A + B** telle que $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 3+b \\ 4+c & 5+d \end{pmatrix}$$

● **multiplication par un scalaire** **C = λA** telle que $c_{ik} = \lambda\, a_{ik}$

$$7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 28 & 35 \end{pmatrix}$$

● **produit** d'une matrice A à p lignes et **n colonnes** par une matrice B à **n lignes** et s colonnes
Pour que AB soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B
Si (L_i) est un vecteur ligne de A et (C_k) un vecteur colonne de B
Produit de matrices **C = A.B** tel que $c_{ik} = (L_i) . (C_k)$ **Produit scalaire** de (L_i) par (C_k)
C = AB est une matrice à p lignes (comme A) et s colonnes (comme B) .



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a+2c & 1b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices et applications linéaires

Si A est la matrice de f et B la matrice de g :
● La somme de 2 matrices correspond à l'application somme de 2 applis de E dans F : f + g → A + B
● Le produit d'une matrice par un scalaire λ correspond à l'application λf : λf → λ A
● Le produit d'une matrice A de M_{np} par une matrice B de M_{ps} correspond à g ○ f → A.B
Soit **f** une application linéaire de E dans F de matrice **A**
Soit **g** une application linéaire de F dans G de matrice **B**
E (dim n) $\xrightarrow{f}$ F (dim p) $\xrightarrow{g}$ G (dim s)
Alors C = **A**.**B** est la matrice de l'application **g** ○ **f** de E dans G (inversion de l'ordre d'écriture)

Matrice de l'identité dans E (I_E)

C'est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On peut aussi appeler I_E (ou I) cette matrice.

Ensembles de matrices

$M_{n,\,p}$ ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
Doté de l'addition et de la multiplication par un scalaire $M_{n\,p}$ est un espace vectoriel .
On en construit une base dite canonique grâce aux n.p matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf 1 (jamais le même). Par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M a pour coordonnées (5, 6, 7, 8) dans la base canonique de M_{22} qu'on appelle aussi $\mathbf{M_2}$.
M_n matrices carrées d'ordre n
C'est aussi, bien sûr un espace vectoriel mais de plus dans M_n la multiplication des matrices est
● associative, ● distributive à gauche et à droite ● et elle admet un élément neutre (I)
Mais : Elle n'est pas commutative, pour la bonne raison qu'en général $g \circ f$ différent de $f \circ g$.

Matrices carrées

M_n est l'ensemble des matrices carrées (n lignes, n colonnes)
● une application f de E dans E est associée à une matrice carrée
● une application f de E dans F est associée à une matrice carrée si dim (E) = dim (F)
● Une application bijective f est associée à une matrice carrée (réciproque fausse)
Comme f est bijective , il existe (dans ce cas seulement) une application réciproque f^{-1} elle aussi bijective Si la matrice A est associée à f , on appelle A^{-1} la matrice associée à f^{-1} .
On dit alors que **A est inversible** et que $\mathbf{A^{-1}}$ est la **matrice inverse** de **A** .

● Calcul de la matrice inverse

V = f(v) s'écrit avec les matrices (V) = M.(v). Cela nous donne un système tel que

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots\ldots + x_na_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \ldots\ldots + x_na_{nn} \end{array}\right\}$$

il suffit de le résoudre et on obtient

$$\left.\begin{array}{l} x_1=X_1b_{11}+X_2b_{12}+\ldots+X_nb_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=X_1b_{n1}+X_2b_{n2}+\ldots+X_nb_{nn} \end{array}\right\}$$

Le premier système qui définit f donnait les coordonnées de V en fonctions de celles de v.
Le nouveau système donne les coordonnées de v en fonction de celles de V. Il définit donc f^{-1}
Les coefficients b_{ik} de ce système forment la matrice A^{-1} associée à f^{-1}.

● Matrice de changement de base

Soit b et B deux bases de E. Si un vecteur V a pour coordonnées $V_b=(x_1, x_2, .., x_n)$ dans la base b il a d'autres coordonnées
$V_B =(X_1, X_2, .., X_n)$ dans la base B.
Le système qui permet de calculer V_B en fonction de V_b a cette allure :

$$\begin{array}{l} X_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots\ldots + x_na_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \ldots\ldots + x_na_{nn} \end{array}$$

Il lui correspond donc une matrice carrée formée des coefficients a_{ik} qui est elle aussi inversible. Un vecteur colonne de la matrice a_{ik} exprime un vecteur b_i de la base b dans la base B. Ceux de la matrice inverse expriment les vecteurs de B dans la base b.
Attention, la matrice M telle que $V_B = M\, V_b$ permet de calculer les coordonnées de V dans la base B quand on connaît ses coordonnées dans la base b mais on l'appelle « **matrice de passage de la base B à la base b** » alors que ce devrait être le contraire. C'est une bizarrerie mathématique.
« Passage de B à b » → $V_B = M\, V_b$ → vecteurs colonnes b = f(B) (b_i en fonction de B)
« Passage de b à B » → $V_b = M^{-1}\, V_B$ → vecteurs colonnes B = f(b) (B_i en fonction de b)

● Toute **matrice inversible** peut être considérée comme une matrice de changement de base.
On a $M.M^{-1} = I$ où I est la matrice carrée de l'identité (coefficient de la diagonale = 1, les autres = 0)
On peut utiliser cette relation pour calculer l'inverse d'une matrice en faisant le produit de M dont les coefficients sont connus par une matrice dont les coefficients sont des inconnues, puis en identifiant les coefficients du produit aux coefficients de I.
Mais ce n'est pas la méthode la plus simple ni la plus naturelle.

● Toute matrice carrée n'est pas forcement inversible
S'il existe un vecteur x ≠0 tel que M(x) = 0, la matrice carrée M n'est pas inversible (puisque M(0)=0).

● **Matrice carrée et système de n équations à n inconnues** .
Soit M une matrice carrée de M_n. J'écris (V) = M (v) , si je remplace les coordonnées de V par des nombres arbitraires, j'obtiens un système de n équations à n inconnues dont les inconnues sont les coordonnées (x_1 , x_2 , … x_n) de v . Résoudre ce système revient à trouver les coordonnées de v connaissant celles de V . Si j'y arrive, c'est que la matrice est inversible. Donc
● Soit le système admet n valeurs de x_i comme solutions et la matrice est inversible
● Soit ce n'est pas le cas et la matrice n'est pas inversible
À l'inverse, pour qu'un système admette n solutions, il faut que sa matrice soit inversible.
Soit par exemple le système 5x + 3y -4 =0 (E1) et 2x + 7y = 8 (E2) . On l'écrit sous la forme
E1 : 4 = 4x + 3y et sa matrice est $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (4, 8) sont les coordonnées de V et (x, y) celles de v
E2 : 8 = 2x + 7y

● **matrices triangulaires**
Je sais que je si je remplace toute équation d'un système à une combinaison linéaire des autres, j'obtiens un système équivalent. Je peux utiliser cette propriété pour essayer d'annuler tous les éléments qui sont sous la diagonale principale de la matrice. Par exemple :
E1 : 4 = 4x + 3y je remplace E2 par 2.E2 – E1 j'obtiens E1 : 4 = 4x + 3y dont la matrice est $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$
E2 : 8 = 2x + 7y E3 : 12 = 0x + 11y
Une matrice dont tous les éléments sous la diagonale sont nuls est dite « triangulaire »
<u>Si il n'y a pas de 0 dans la diagonale d'une matrice triangulaire, la matrice est inversible</u> et c'est aussi le cas de la matrice originelle puisque le système d'équations ainsi obtenu est équivalent au premier. Il est plus simple de calculer l'inverse d'une matrice triangulaire, mais s'il faut commencer par la triangulariser, la difficulté est à peu prés équivalente.

Impact d' un changement de base sur une matrice

Soit $\mathbf{M}_{bB}$ la matrice de f application linéaire de E rapporté à une base b dans F rapporté à une base B.
● Si on change soit la base b pour b' , soit la base B pour B' (ou les 2 à la fois), l'application linéaire continue à exister mais sa matrice change de forme. Elle a toujours n lignes et p colonnes mais ses coefficients ne sont pas les mêmes. Par exemple, on va appeler la nouvelle matrice $\mathbf{M}_{bB'}$.
● On peut appeler $\mathbf{B}_{bb'}$ la matrice du changement de base b → b' qu'on appelle C_b
et $\mathbf{B}_{BB'}$ celle du changement de base B → B' qu'on appelle C_B .
● de la même façon, on peut appeler f_{bB} l'application quand elle est définie dans les bases b et B
$f_{bB'}$ l'application quand elle est définie dans les bases b et B'
● on peut considérer que $f_{bB'}$ est la composition de f_{bB} suivie du changement de base dans F : C_B.

$$\begin{array}{lll} E_b \longrightarrow & F_B \longrightarrow & F_{B'} \\ v_b \xrightarrow{f_{bB}} & V_B \xrightarrow{C_B} & V_{B'} \\ v_b & \xrightarrow{\quad f_{bB'} \quad} & V_{B'} \end{array}$$

$f_{bB'} = C_B \circ f_{bB}$.
On en déduit que $\mathbf{M}_{bB'} = \mathbf{M}_{bB} . \mathbf{B}_{BB'}$ si le changement de base à lieu dans F
Et si le changement de base à lieu dans E : $\mathbf{M}_{b'B} = \mathbf{B}^{-1}_{bb'} . \mathbf{M}_{bB}$ **ou** $\mathbf{B}_{b'b} . \mathbf{M}_{bB}$
Il faut d'abord faire le changement de base b' → b qui est le changement réciproque de b → b' avant de pouvoir appliquer f_{bB} qui est définie dans la base b .
Si les deux changements de base, dans E et dans F sont simultanés $\mathbf{M}_{b'B'} = \mathbf{B}^{-1}_{bb'} . \mathbf{M}_{bB} . \mathbf{B}_{BB'}$.
(En rouge l'ancienne matrice de f , en bleu la matrice de f après changement de base, en noir les matrices de changements de base)
Deux matrices M et M' sont dites **équivalentes** si il existe 2 matrices **inversibles** A et B telles que **M'=AMB**
C'est donc le cas de $\mathbf{M}_{b'B}$ et $\mathbf{M}_{bB}$
Si M et M' sont 2 matrices carrées de M_n liées à la même application mais dans 2 bases différentes, si on appelle B la matrice de changement de base on aura $\mathbf{M' = B^{-1}MB}$ et les matrices seront dites **semblables**.

Vecteurs propres, valeurs propres

> **Pré requis :** Il faut savoir que le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre **ad – cb**. [En savoir plus.]
> La matrice est inversible si son déterminant est non nul. Si la matrice n'est pas inversible son déterminant est nul (ce qui est le cas pour la matrice d'une application f telle qu'il existe x ≠0 tel que f(x) = 0).
> Le déterminant est utile dans le calcul des coefficients de la matrice inverse.
> On note **det (M)** ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le déterminant de la matrice M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit f une application linéaire dans E . Sa matrice est carrée et appartient à $\mathbf{M}_n$.
Si il existe des vecteurs x non nuls colinéaires à leur image c'est-à-dire tels que f(x) = λx (λ ∊ R) on les appelle des **vecteurs propres**. Dans ce cas, tout vecteur colinéaire à x est un vecteur propre, mais λ est unique pour les vecteurs du sous espace engendré par {x} car si f(kx) = kλ'x = kf(x) = kλx on a forcément λ'=λ. λ est appelé **valeur propre** associée au vecteur propre x (et à toute sa famille) .
Si il existe une base b de E formée de n vecteurs propres {b_i} chacun étant associé à une valeur propre λ_i .
Alors, on a pour tout vecteur de la base f (b_i) = λ_i . b_i et la matrice de f dans cette base s'écrit par exemple:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

> La diagonale principale est formée des valeurs propres et les autres coefficients sont nuls. Une telle matrice est dite « **diagonale** ».
> Une matrice pouvant être transformée en une matrice diagonale par un changement de base est dite « **diagonalisable** ».

Par exemple, la matrice d'une rotation d'angle π est diagonalisable, puisque f(x) = – x .

Pour calculer les valeurs propres on résout le système d'équations en λ Det(M-λI) = 0

Pour calculer les valeurs propres x on résout le système (M-λI)x = 0. (vecteur nul)

Par exemple pour M = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$ = 0 donne λ1= –1 et λ2 = +2

Vecteur v1 propre associé à –1 → (M-λI) x = 0 donne $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix}$ → 6x1 = 3x2 → x2 = 2x1 →$v1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$
Vecteur propre v2 associé à 2 → $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix}$ → x1 = x2 →v2 = $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ n'est pas nul {v1, v2} forme une base de E

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients de sa diagonale.
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de sa diagonale.
Si sa diagonale ne comporte pas de 0 une matrice triangulaire est inversible.

Opérations élémentaires sur les matrices

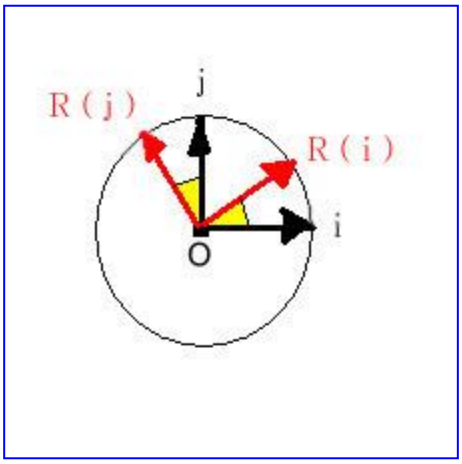
Le rang de f est la dimension de Im (f) . C'est aussi **le rang de la matrice M** associée à f. Et aussi le rang du système de vecteurs lignes ou colonnes de la matrice. (combien sont linéairement indépendants ?)
On appelle **opérations élémentaires** sur M
1) la permutation de 2 lignes (resp. colonnes) ce qui revient à inverser l'ordre des vecteurs d'une base
2) l'ajout à une ligne (resp. colonne) d'une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. colonnes) , ce qui revient à remplacer un vecteur d'une base par un vecteur qui reste indépendant des autres.
3) La multiplication d'une ligne (resp. colonne) par un scalaire λ non nul ce qui revient à diviser par λ un vecteur d'une base.
En fait, les opérations élémentaires reviennent à modifier partiellement une base et la remplacer par une autre. Les opérations élémentaires sur M transforment M en une matrice M' **de même rang**.
Et deux matrices de même rang sont **équivalentes**. (La réciproque est vraie) .
Donc, quand on procède à une opération élémentaire sur M, on obtient une nouvelle matrice M' qui peut être considérée comme liée à l'application f si on choisit convenablement la base b' de E et la base B' de F.

Retour sur les applications linéaires

Soit f application linéaire de E de dimension n dans F de dimension p .
Ker (f) est un sous espace vectoriel de E de dimension r .
Donc E est égal à la réunion de 2 SEV disjoints Ker (f) et son supplémentaire qu'on appellera G.
● G est un SEV de dimension n – r qui admet comme base { b_1,……,b_{n-r} }
Ker (f) est un sous espace vectoriel de dimension r qui admet comme base { b_{n-r+1} , ……., b_n }
Et la réunion de ces 2 bases **B** = { b_1 , …….. , b_n } forme une base de E .
● les images des vecteurs de la base de G forment un système libre de n – r vecteurs dans F .
En effet, s'il existait des scalaires λ_i non tous nuls, tels que $\lambda_1 f(b_1) + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} f(b_{n-r}) = 0$
On aurait $f(\lambda_1 b_1 + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} b_{n-r}) = 0$ et $\lambda_1 b_1 + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} b_{n-r}$ appartiendrait au noyau ker (f) ce qui est incompatible avec nos hypothèses (ce vecteur appartient au supplémentaire du noyau) .
● On en déduit au passage que la restriction de f à G supplémentaire de Ker (f) est injective.
● Donc { f (b_1), …….. , f (b_{n-r}) } système de vecteurs linéairement indépendants de F peut être complétée par p – (n – r) vecteurs de F choisis pour former une base de F. Appelons **B'** cette base de F .
● Si on prend un vecteur de la base B , son image par f s'écrira dans la base B ' :
Pour i ≤ n – r : f (b_i) = (0, 0, ….., 0 , 1 , 0 , …..0) seule sa $i^{ème}$ coordonnée n'est pas nulle
Pour i > n – r : f (b_i) = (0 , …………………….., 0) puisque b_i appartient au noyau .
● Donc, si on choisit B comme base de E et B' comme base de F , la matrice de f s'écrira par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De cette écriture on déduit
● que Im (f) est de dimension 4 donc que la matrice et f sont de rang 4 (quatre 1 dans la diagonale) .
● Que Ker (f) est de dimension 2 (2 colonnes de 0)
● Que l'application n'est pas surjective (une ligne de 0) et que
Dim F = Dim (Im (f)) + 1
● Soit une autre application linéaire de rang 4 de E dans F , on va pouvoir par le même procédé, la transcrire en une matrice égale à M (mais dans d'autres bases) . C'est donc que 2 matrices de même rang sont équivalentes.
● Si une matrice 5 x 6 telle que M est de rang 4 , c'est que je peux annuler 2 des ses vecteurs colonnes et un de ses vecteurs lignes en leur ajoutant une combinaison linéaire des autres et par d'autres opération élémentaires obtenir une matrice semblable à M
● Si l'application est bijective, en choisissant les bases B et B' selon le même procédé, on peut l'écrire sous la forme d'une matrice carrée dont la diagonale est formée de 1 , les autres coefficients étant nuls.
Mais s'agissant d'une application de E dans F il ne faut pas la confondre avec l'identité.
Par exemple pour une rotation dans le plan :



Si le plan de départ et le plan d'arrivée sont rapportés à la base {i , j}, la matrice de la rotation est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

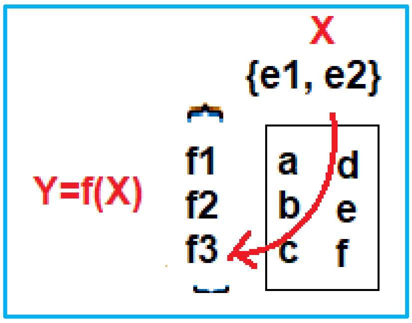
Mais si on garde {i , j } pour le plan de départ et on pend {R (i), R (j)} pour le plan d'arrivée la matrice de la rotation devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si on modifie l'ordre de la base d'arrivée {R (j) , R(i)} la matrice devient : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Permutation des vecteurs lignes)

Si je prends pour base d'arrivée {R (j) , $\frac{R(i)}{\lambda}$} la matrice devient $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ (multiplication de la ligne 2 par λ)

Et ainsi de suite, on peut retrouver sur cet exemple tous les changements de base correspondant aux opérations élémentaires sur les matrices.
Dans tous les cas, si on garde la base de départ { i , j } la première colonne sera R (i) et la seconde R (j) puisque ce sont les images de la base de départ par R, mais les coordonnées de R (i) et de R (j) changeront selon le choix de la base d'arrivée.
Une modification sur les lignes impacte la base de F, une modification sur les colonnes, la base de E.

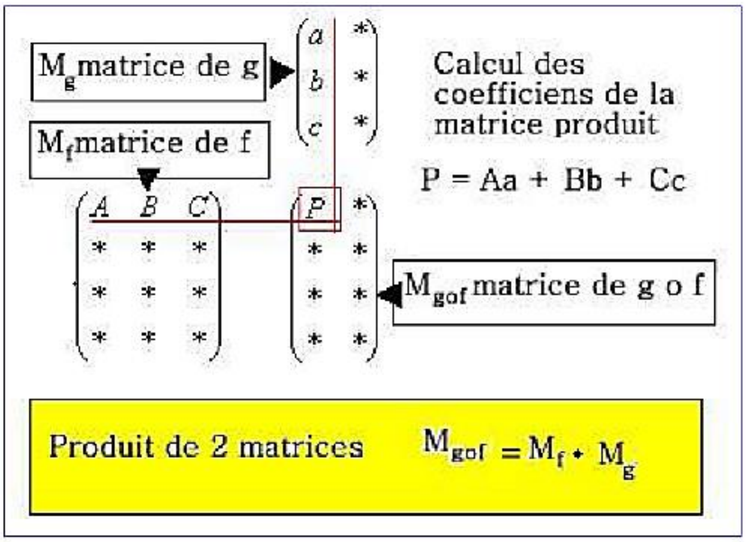
Matrice (vecteur) ligne, matrice (vecteur) colonne, produit scalaire



Soit f une application linéaire de E dans F et M sa matrice associée.
Si **E est de dimension 2**, (base $\{e_1, e_2\}$), **M a 2 colonnes**.
Si **F est de dimension 3**, (base $\{f_1, f_2, f_3\}$), **M a 3 lignes**.
L'image ci-contre illustre ces correspondances. (X en haut, f(X) à gauche)

La ième colonne est formée des coordonnées de **f(e*i*)** dans la base de F. Autrement dit $\mathbf{f(e_1)=a.f_1 + b.f_2 + c.f_3}$ et $\mathbf{f(e_2)=d.f_1 + e.f_2 + f.f_3}$.
Ce qui permet de construire, par exemple, la matrice d'une rotation, ou de n'importe quelle application linéaire de l'espace géométrique.

La *i* ème coordonnée du vecteur Y=f(X) est le produit scalaire du **i ème vecteur ligne** par X. Autrement dit
Si $Y = f(X) = Y1.f_1 + Y2.f_2 + Y3.f_3$ et $X = X1.e_1 + X2.e_2$
Y1 =aX1+dX2 ; Y2 = bX1 + eX2 ; Y3 = cX1 + fX2
Ce qui permet de trouver l'image dans F de n'importe quel vecteur de E.



Si Mf est la matrice de f et Mg la matrice de g.
Le produit Mf*Mg est la matrice de f°g.
Attention ! cela veut dire qu'on commence par appliquer g avant f et pourtant dans le produit de matrices correspondant on écrit la matrice de f avant la matrice de g.
Pour que ce produit existe il faut que le nombre de colonnes de Mf soit égal au nombre de lignes de Mg ce qui est aussi la dimension de l'espace vectoriel qui reçoit les images par g et les antécédents de f.
Pour calculer les coefficients de la matrice produit on procède comme indiqué ci-contre, (Mf à gauche, Mg à droite en haut) chaque coefficient étant le produit scalaire d'une colonne de Mg par une ligne de Mf.

$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $y^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

y^t : peut se lire comme vecteur transposé ou vecteur ligne. Mais il ne faut pas voir 1,2,3 comme des composantes dans une base mais comme les coefficients d'une matrice de 1 x 3

Le produit est vu comme une multiplication de matrices

$y^t . x$ =

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & P \end{array}$$

avec P = 1a+2b+3c (produit scalaire)

tandis que

$x . y^t$ =

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \begin{matrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{matrix} \end{array}$$

(une matrice)

Dans ce qui précède on considère une ligne ou une colonne comme un vecteur (puisqu'on parle de produit scalaire) mais dans quel espace vectoriel ? Dans quelle base sont évaluées leurs coordonnées ?
La définition du produit ci-contre donne la solution à ce problème.
Finalement les lois du produit de ces vecteurs sont celles du produit des matrices. Ce qui signifie que ce qu'on appelle vecteur ligne (ou transposé) et vecteur colonne sont en fait des matrices à une ligne ou une colonne. Si n est leur nombre de coefficients l'ensemble des matrices de ce type est un espace vectoriel isomorphe à C^n (ou R^n)
Et leur base est formée de matrices dont la forme est par exemple
(1 0 0), (0 1 0) et (0 0 1) pour les vecteurs lignes de dimension 3.
On peut donc considérer les matrices comme des vecteurs.

Factorisation de Cholesky

Extrait de Wikipedia

La **factorisation de Cholesky**, nommée d'après André-Louis Cholesky, consiste, pour une matrice symétrique définie positive A, à déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que : $A=LL^{\mathrm{T}}$.

La matrice L est en quelque sorte une « racine carrée » de A. Cette décomposition permet notamment de calculer la matrice inverse A^{-1}, de calculer le déterminant de A (égal au carré du produit des éléments diagonaux de L) ou encore de simuler une loi multinormale. Elle est aussi utilisée en chimie quantique pour accélérer les calculs (voir Décomposition de Cholesky (chimie quantique)).

La matrice symétrique A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

est égale au produit de la matrice triangulaire L :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

avec à sa droite sa transposée L^{T} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisation de Cholesky d'une matrice — Si A est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que :

$A=LL^{\mathrm{T}}$.

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous strictement positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

On identifie les coefficients de L par identification du produit LL^{T} avec les coefficients de A (le triangle supérieur suffit) .

Si A est une matrice telle que

- ■ A symétrique et $a_{ii} > 0$
- ■ A est à diagonale strictement dominante tout i $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ avec (j≠i)

Alors A admet une décomposition de Cholesky

Décomposition de Cholesky alternative [modifier | modifier le code]

La décomposition de Cholesky alternative permet d'éviter l'utilisation des racines carrées *au sein des sommes*, source potentielle de problème en calcul numérique, elle se calcule de la façon suivante[1] :

$$A = LDL^{\mathrm{T}}$$

où D est une matrice diagonale, et L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale.

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_{kk}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_{jj}}\left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk}\right), \qquad \text{pour } i > j.$$

Les factorisations LDL^{T} et LL^{T} (notez que la matrice L est différente dans les deux cas) sont liées :

$$A = LDL^{\mathrm{T}} = LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^{\mathrm{T}} = LD^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = LD^{\frac{1}{2}}(LD^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}$$

La dernière expression étant le produit d'une matrice triangulaire et de sa transposée, de la même manière que dans la factorisation LL^{T}.

On remarquera que la racine carrée d'une matrice diagonale (ici, $D^{1/2}$) se calcule trivialement en prenant les racines carrées de chacun de ses éléments.

Pour calculer la décomposition de A, nous devons vérifier que A est bien symétrique définie positive

M définie positive équivaut à l'une de ces 4 propriétés

- ■ Valeurs propres de M positives
- ■ Pour toute matrice colonne X on a $X^{\mathrm{T}}.M.X > 0$ autrement dit forme quadratique définie par M positive
- ■ La forme bilinéaire symétrique $(x,y) \to x^{\mathrm{T}}My$ est un produit scalaire sur R^n
- ■ Il existe N inversible telle que $M = N^{\mathrm{T}}N$

Utilité de Cholesky :

- ■ Calculer le déterminant de A (produit des carrés des coefficients de la diagonale des triangulaires)
- ■ Inverser A de façon à résoudre le système d'équations associé.

Transposée, transconjuguée, hermitienne, symétrique, normale, unitaire, orthogonale

triangulaire: $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}$ *diagonale* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ *strictement triangulaire:* $\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&4&1&7\\0&2&3&4\\0&0&1&3\end{pmatrix}$ Hessenberg si $A_{i,j}$ avec i > j+1 = 0

$A=\begin{pmatrix}2+3i&3+4i\\1+5i&3+7i\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}2+3i&1+5i\\3+4i&3+7i\end{pmatrix}$, *transposée* $A^H=\begin{pmatrix}2-3i&1-5i\\3-4i&3-7i\end{pmatrix}$ *transconjuguée*

$(A+B)^H=A^H+B^H$ $(\alpha A)^H=\overline{\alpha}A^H$. $(AB)^H=B^HA^H$, $(AB)^T=B^TA^T$. $(AB)^T=B^TA^T$

Si $A \in C^{n,n}$

Produit scalaire dans R^n $y^T.x$ = <x,y> Produit scalaire dans C^n $y^H.x$ =<x,y> Norme 2 de x dans R^n $\sqrt{x^Tx}$ Norme 2 de x dans C^n $\sqrt{x^Hx}$ A **hermitienne** si $A^H = A$ A **symétrique** si $A^T=A$ A **normale** si $A.A^H = A^H.A$ A **unitaire** si $A.A^H = A^H.A = I_n$ A **orthogonale** si $A\in R^n$ et $A.A^T = A^T.A = I_n$	Si U matrice unitaire Préservation de la norme $\|\|Ux\|\|= \|\|x\|\|$. Préservation du produit scalaire <Ux,Uy> = <x,y> Soit x tel que $\|\|x\|\| =x^H.x = 1$ et $A =I_n - 2\, x^H.x$ A est dite **élémentaire unitaire**. A est hermitienne.

Définition 1.18 (Inverse d'une matrice). *Soit* $A\in\mathbb{C}^{n,n}$. *On dit que A est* inversible *s'il existe* $B\in\mathbb{C}^{n,n}$ *telle que* $AB=BA=I_n$. *B est dit* inverse *de la matrice A et elle est notée* A^{-1}.

Inverse transposée Notée $A^{-T} =(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Inverse d'un produit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (noter l'inversion des facteurs)

Matrices positives dans $R^{n,n}$

f forme bilinéaire symétrique **f(u,v) = f(v,u)** et **f(u,v) linéaire** par rapport à u et par rapport à v , soit
f(u+v,w) = f(u,v)+f(uw) , f(u,v+w) = f(u,v)+f(u,w), f(λu,v) =λf(u,v) et f(u,λv) = λf(u,v)

- Tout produit scalaire est une f.b.s
- La f.b.s associée à une <u>matrice réelle symétrique</u> M est $f(x,y) = x^TM\,y = y^TMx$. f(x,y) est un scalaire.
- Si pour tout x on a $\mathbf{x^TM\,x \geq 0}$ on dit que **la matrice M est positive**
  M positive ↔ les valeurs propres de M sont ≥ 0 ↔ ∃ N réelle telle $M = N^T N$
- Si de plus M est inversible on dit que **M est définie positive**

Spectre d'une matrice, matrices symétriques, quelques définitions

Dans $C^{n,n}$

Valeurs propres de A : λ tel que **Ax =λx** . λ racine de l'équation **det (A – λI_n) = 0**

Spectre de A : ensemble des valeurs propres.

■ Si A est inversible : λ valeur propre de A → λ^{-1} valeur propre de A^{-1}

Matrices symétriques

■ Les n pivots de A sont positifs

■ Les n déterminants des sous matrices principales de A $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$... sont positifs

■ Les n valeurs propres de A sont réelles

■ Vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux

■ Si A est symétrique à valeurs réelles A diagonalisable sous la forme S B S^{-1} avec B matrice diagonale formée des valeurs propres de A

■ Pour tout vecteur x non nul $x^T A x \geq 0$

■ $A = R^T R$ où R a des colonnes linéairement indépendantes

Matrices symétriques définies positives (SDP, HDP)

A définie positive si

■ Dans R^n pour tout vecteur x non nul $x^T A x > 0$

■ Dans C^n pour tout vecteur x non nul $x^H A x > 0$

■ Une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres (automatiquement réelles) sont positives.

■

Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

(λ , x vecteur propre associé) $x^H A x = \lambda x^H x = \lambda||x||^2$ $\lambda = \frac{x^H A x}{||x||^2} > 0$

■ Pour toute matrice réelle *A*, la matrice A^TA est une matrice symétrique positive.

De plus si *A* est une matrice carrée inversible, A^TA est définie positive.

■ Toute matrice symétrique positive admet une unique racine carrée symétrique positive, en clair :

Toute S symétrique positive , il existe T symétrique positive unique telle $T^2 = S$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique mais elle est définie positive et sp(A) ={1-i , 1+i}

Matrice triangulaire : Ses valeurs propres λi sont ses coefficients diagonaux.

Rayon spectral r(A) = le plus grand module de ses valeurs propres. Max(|λi|

Déterminant $\det(A) = \prod \lambda_i$ et $\det(A^{-1}) = \prod \frac{1}{\lambda i} = \frac{1}{det(A)}$

Noyau d'une matrice de E_n dans F_m ker(A) ={x∈E | Ax =0}

Image d'une matrice Im(A) ou Span(A) ou range(A) sous-espace de F engendré par ses vecteurs colonnes (si {ei} = base de E, i^{eme} colonne = f(ei)) ou { Ax pour tout x ∈ E}

Rang d'une matrice Rang(A) = dimension de image de A.

Rang(A) = rang(A^T) et rang(A) + dim(Ker(A)) = dim E = n

A matrice carrée n,n inversible propriétés équivalentes

det(A) ≠0 ; ker(A) ={0} ; rang (A) = n ; colonnes et lignes linéairement indépendantes

Décomposition d'une matrice, valeurs singulières

Matrice diagonalisable dans n,n

A diagonalisable s'il existe Q inversible et D diagonale telles que $A = Q^{-1} D Q$.

- D contient les valeurs propres de A
- Les colonnes de Q^{-1} sont formées des vecteurs propres associés.

A diagonalisable si et seulement si il existe une base de C^n ou R^n formée de vecteurs propres de A

A est normale ($A^HA = AA^H$) si et seulement si il existe U unitaire ($UU^H=U^HU = I_n$) telle que
$U^{-1}AU = UAU^{-1} = D = diag(\lambda 1,\dots,\lambda n)$ avec λi valeurs propres de A

Théorème 1.38 (Décomposition de Schur (DS)). *Pour toute $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ il existe $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitaire telle que*

$$U^{-1}AU = U^HAU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: T,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres de A.

Dans C^n, **si A est hermitienne**, T est diagonale , ses valeurs propres sont réelles, les colonnes de U (ou les lignes de $U^{-1} = U^T$) sont les vecteurs propres de A.

Dans R^n , **si A est symétrique**, T est diagonale , ses valeurs propres sont réelles, U est orthogonale à valeurs réelles, les colonnes de U (ou les lignes de $U^{-1} = U^T$) sont les vecteurs propres de A.

Décomposition en valeurs singulières

Toute $A \in C^{m,n}$ il existe $U \in C^{m,m}$ et $V \in C^{n,n}$ unitaires telles que $U^HAV = D = diag(s1,s2,\dots,sp)$
Toute $A \in R^{m,n}$ il existe $U \in R^{m,m}$ et $V \in R^{n,n}$ unitaires telles que $U^TAV = D = diag(s1,s2,\dots,sp)$
Avec **p** =min(m,n) et **s1,..,sp valeurs singulières** et réels strictement positifs

Si m=2 et n =3 $D=\begin{pmatrix} s1 & 0 & 0 \\ 0 & s2 & 0 \end{pmatrix}$ ou si m=3 et n =2 $D= \begin{pmatrix} s1 & 0 \\ 0 & s2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a
$D^H D = (U^HAV)^H U^HAV = (V^HA^HU) U^HAV = V^HA^HAV = V^{-1}A^HAV= d$
$UU^H=I_n$ $V^H=V^{-1}$ forme diagonale de A^HA
Or $D^HD = diag(s1^2,s2^2,\dots sp^2) = d = diag(\lambda 1,\lambda 2,\dots,\lambda p)$ ou les λi sont les valeurs propres de A^HA
On en déduit que

Les valeurs singulières de A sont les racines des valeurs propres de A^HA

Si $A \in C^{n,n}$ est hermitienne

$A^HA = A^2$ et si λ est valeur propre de A, λ^2 est valeur propre de A^2.

Les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

Le rayon spectral de A est égal à sa plus grande valeur propre ou à sa plus grande valeur singulière.

Normes matricielles
Si A est une matrice carrée (n,n)
||A|| est un réel ≥ 0 vérifiant ||A||= 0 pour A =0 , ||λA||=λ||A|| , ||A+B|| ≤||A||+||B||, ||AB|| ≤||A||||B||,
Dans la suite **A** ∈ **R**^{n,n}

Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|,$$

En effet A étant associée à une application linéaire on a ||Aλv|| =λ||Av|| et ||λv|| =λ||v|| ce qui fait que
Si v est un vecteur pour lequel sup $\frac{||Av||}{||v||}$ est atteint, en choisissant convenablement λ il doit exister λv de norme <1 ou = 1 tel que sup $\frac{||Av||}{||v||}$= sup $\frac{||A\lambda v||}{||\lambda v||}$

On en déduit que
Pour tout vecteur x $\boxed{||Ax|| \leq ||A||||x||}$

Mais ||v|| peut être définie de plusieurs façons en particulier selon la valeur de p dans

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \textbf{ou} \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Si p = 2 =n ou p=3=n on reconnait les normes euclidiennes dans des espaces de dimension 2 ou 3 rapportés à des bases orthonormées.
Mais ici p peut être différent de n.

On a

$$\|A\|_2 = \|A^T\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} \sigma_i(A),$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

A décomposée en v.s $=\begin{pmatrix} s1 & 0 & 0 \\ 0 & s2 & 0 \\ 0 & 0 & s3 \end{pmatrix}$ $||A||_2$ = max s_i

A = $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ $||A||_1$ = max (sommes des coeff par ligne)

A = $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ $||A||_\infty$ = max (sommes des coeff par col.)

Pour donner une idée diagonalisons A grâce à ses valeurs singulières A $=\begin{pmatrix} s1 & 0 & 0 \\ 0 & s2 & 0 \\ 0 & 0 & s3 \end{pmatrix}$

■ Les vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) appartiennent à la sphère unité et si S1 est la plus grande valeur singulière, parmi ces 3 vecteurs (S1,0,0), (0,S2,0) et (0,0,S3), le vecteur image f(ei) qui a la plus grande norme est le premier vecteur de norme S1.
On a donc sup ($||Av||_2$) ≥ S1 pour $||v||_2$ = 1.
Prenons un vecteur quelconque (x1,x2,x3) de la sphère unité , son image est (s1x1, s2x2, s3x3) sa norme 2 est $\sqrt{(s1x1)^2+(s2x2)^2+(s3x3)^2} \leq \sqrt{s1^2(x1^2+x2^2+x3^2)}$ = S1
Donc la norme de l'image de tout vecteur unité est ≤ S1 et comme il existe un vecteur unité dont l'image a pour norme S1, on en déduit que **S1 = sup $||Ax||_2$ pour ||x||=1**. S1 est la norme 2 de A.

■ $||Ax||_1 \leq \sum|x_j|\sum_i |a_{ij}|$ et si Max $\sum_i |a_{ij}|$ atteint pour j= 3 $||Ax|| \leq \sum|x_j|\sum_i |a_{i3}| = (\sum_i |a_{i3}|).||x|| = \sum_i |a_{i3}|$ si ||x|| = 1 et ce maximum est atteint pour le 3e vecteur colonne = f(e3). Donc $\sum_i |a_{i3}|$ est bien égal à $||A||_1$.

■ $||Ax||_\infty = \text{Max} \ \sum_j |a_{ij}|\,|x_j|$ et par définition si x a pour norme 1, $x_j \leq 1$ on a $||Ax||_\infty \leq \text{Max} \ \sum_j |a_{ij}|$ et le vecteur (1,1..1) ayant pour coordonnée i $\sum_j a_{ij}$ ce maximum est atteint et $||Ax||_\infty = \text{Max} \ \sum_j |a_{ij}|$

Propriétés des normes subordonnées sur $R^{n,n}$.
Il existe toujours un vecteur v tel que $||M|| = \frac{||Mv||}{||v||}$
$||I_n|| = 1$
$||AB|| \leq ||A||\ ||B||$
Pour toute matrice A le rayon spectral $r(A) \leq ||A||$ et il existe une norme telle que $||A|| \leq r(A) + \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$).

Solutions numériques des systèmes linéaires

Conditionnement d'une matrice inversible : **$cond(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$** avec **$cond(A) \geq 1$**
Si $cond_2(A)$ est lié à la norme 2 on a $||A|| = \max(s_i)$ valeurs singulières et $||A^{-1}|| = \max(\frac{1}{S_i})$ d'où
$Cond_2(A) = \frac{S_G}{S_P}$ où S_G est la plus grande valeur singulière de A et S_P la plus petite valeur singulière.
Si A est hermitienne $Cond_2(A) = \frac{\lambda_G}{\lambda_P}$ (rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre)
Si **$r(A) < 1 \rightarrow I_n - A$** est inversible et si **$||A|| < 1$** on a $\boxed{\frac{1}{1+||A||} \leq ||I_n - A||^{-1} \leq \frac{1}{1-||A||}}$

Conditionnement et perturbations résolution de y =A x
1er cas perturbation de y
Supposons que **x** soit la solution exacte de **y=Ax** et x_p la solution perturbée de **$y+\delta y = Ax_p$**
On a alors l'inégalité $\boxed{\frac{||X-X_p||}{||x||} \leq cond(A) \frac{||\delta y||}{||y||}}$

2eme cas perturbation de A
Supposons que **x** soit la solution exacte de **y=Ax** et **xp** la solution perturbée de **$y = (A+\delta A)xp$**
On a alors l'inégalité $\boxed{\frac{||X-X_p||}{||x||} \leq cond(A) \frac{||\delta A||}{||A||}}$

3eme cas perturbations simultanées de A et de y
Supposons que **x** soit la solution exacte de **y=Ax** et **xp** la solution perturbée de **$y+\delta y = (A+\delta A)xp$**

On a alors l'inégalité $\boxed{\frac{||X-X_p||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1-cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\delta y||}{||y||} + \frac{||\delta A||}{||A||}\right)}$

On pourrait écrire δx (erreur sur x) au lieu de $X-X_P$.
Les quotients sont appelés erreur relative = $\frac{erreur}{mesure\ théorique}$
Plus cond(A) est grand plus une petite erreur sur y ou A provoque une grande erreur sur la solution X

Si les erreurs sont telles $||\delta y|| = k\ ||y||$, $||\delta A|| = k\ ||A||$ et $k\ cond(A) < 1$
On a $\boxed{\frac{||X-X_p||}{||x||} \leq \frac{2k\ cond(A)}{1-k cond(A)}}$

Matrices liées aux opérations élémentaires

Toute **inversion de lignes ou de colonnes** par exemple 1 et 3 d'une matrice A débouche sur une matrice PA ou AP où P est obtenue à partir de la matrice identité dans laquelle on a permuté les lignes 1 et 3 de I_n.

Autrement dit pour obtenir P matrice d'inversion (1↔3), on permute les lignes 1 et 3 de la matrice identité.

Matrice identité = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matrice d'inversion des lignes (resp colonnes) 1 et 3→ P = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

P= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ P=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
AP inverse les colonnes 1 et 3 de A	PA inverse les lignes 1 et 3 de A

On a $\boxed{P^{-1} = P^T = P}$

L'opération consistant à substituer à une ligne de A la combinaison linéaire de 2 lignes par exemple

Ligne 1 remplacée par 2 fois ligne 1 + 4 fois ligne 3 correspond elle aussi a une matrice LA où L est obtenue à partir de la matrice identité dans laquelle on a remplacé la ligne 1 par 2 fois la ligne 1 +4 fois ligne 3.

$\mathrm{In} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ L = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ L1 = 2(1 0 0) + 4(0 0 1)

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ L=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	L1= $\begin{pmatrix} 1/a11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ L2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a21 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/a11 & 0 & 0 \\ -a21/a11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Dans LA on a bien remplacé L1 par 2 L1 + 4L3 =(2 0 4) + (0 8 4) = (2 8 8)	La matrice L2L1 résume 2 opérations : 1 diviser la 1ere ligne par a11 de façon à avoir a11 = 1. 2. Enlever a21 fois L1 à la 2[e] ligne de façon à avoir a21 = 0.

Si on veut triangulariser la matrice A par la méthode du pivot de Gauss On va faire L1A puis L2L1A,

Puis L3L2L1A pour annuler a31 et L3L2L1 sera égale à $\begin{pmatrix} 1/a11 & 0 & 0 \\ -a21/a11 & 1 & 0 \\ -a31/a11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on aura

L3L2L1A =$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & K & e \end{pmatrix}$ Pour annuler le K il faudra enlever $\frac{K}{c}$ L2 à L3

L3L2L1 sera égale à $\begin{pmatrix} 1/a11 & 0 & 0 \\ -a21/a11 & 1 & 0 \\ -a31/a11 & -k/c & 1 \end{pmatrix}$ et L3L2L1A sera triangulaire

Si on veut résoudre le système AX= b

1. On ajoute à droite de A la colonne b $\begin{matrix} a11 & a12 & a13b1 \\ a21 & a22 & a23b2 \\ a31 & a32 & a33b3 \end{matrix}$ matrice augmentée A|b

2 On triangularise A par la méthode de Gauss, ce qui modifie la colonne b

$$\begin{matrix} 1 & A & B & B1 \\ 0 & C & D & B2 \\ 0 & 0 & E & B3 \end{matrix}$$

À ce stade on a EX3 =B3 → X3 = puis par remontée CX2+DX3=B3 etc..

Autre méthode à partir de

$$\begin{matrix} 1 & A & B & B1 \\ 0 & C & D & B2 \\ 0 & 0 & E & B3 \end{matrix}$$

On multiplie chaque ligne par l'inverse du coefficient diagonal pour que celui-ci soit égal à 1

$$\begin{matrix} 1 & A & B & B1 \\ 0 & 1 & D & B2 \\ 0 & 0 & 1 & B3 \end{matrix}$$

Ensuite on combine les lignes de telle sorte que tous les coefficients extérieurs à la diagonale soient nuls

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta 2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta 3 \end{matrix}$$

Et à ce stade on a x1 = β1 , x2 = β2, x3 = β3

Calcul de déterminant.

Il suffit de diagonaliser la matrice et det(A) = produit des coefficients diagonaux.

Matrice inverse

$(A\|I_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$(I_n\|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$
On part de A augmentée de I_n	On "pivote" jusqu'à transformer A en I_n , ce qui transforme l'augmentation I_n en A^{-1}.