INTEGRATION

Table des matières

Tableau de primitives (à une constante près)

$(x-a)^{\alpha}$ $\alpha \neq -1$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tan x	$\frac{1}{1-x^2}$	Arg th x	$\frac{1}{2} \ln \left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\frac{1}{x-a}$ $a \in \mathbb{R}$	ln | x – a |	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	Arc tan x	
$\frac{1}{x-c}$ $c \in \mathbb{R}$	ln |x - c|	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left\lvert \tan \frac{x}{2} \right\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arc sin x	
ln x	X (ln x -1)	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left\lvert \tan \left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	Arg sh x	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
e^{cx}	$\frac{e^{cx}}{c}$	Coth x	ln | sh x |	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	Arg ch x	$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
tan x	–ln |cos x|	th x	ln ch x	$\frac{1}{x^2-1}$	–Arg th x	$-\frac{1}{2} \ln \left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$t^n e^{\pm t}$	$(a_{n+1}t^{n+1}+a_n t^{n+}+\ldots+a_0)e^{\pm t}$			$P_n(t)e^{\pm t}$	$P_{n+1}(t)e^{\pm t}$ (P_n polynôme °n)	

Nous noterons ∫ **f(x)** une primitive de f(x). Mais, dans le cadre de ce cours, de manière implicite nous considèrerons que F(x) est une primitive de f(x), G(x) une primitive de g(x) etc …
∫ cos x = sin x + C et plus généralement ∫ f(x) = F(x) .

Techniques d'intégration

Changement de variable

Sous l'intégrale on peut avoir f(x)dx ou f(t)dt , ce qui équivaut à un simple changement de nom de la variable et ne change pas la valeur de l'intégrale.
Mais si t et x sont des variables différentes, on ne sait pas calculer l'intégrale de f(x)dt ou de f(t)dx .
On a vu qu'entre une fonction et sa variable existe la relation **df = f '(x).dx** .
Donc si dans f je procède à un changement de variable, x est une fonction x(t) de t, et on a,
en tout point du domaine d'intégration **dx = x'(t)dt** et **f(x) = g(t)** ,
g(t) étant la fonction obtenue à partir de f par le changement de variable t = t(x).
En règle générale, dans f on remplace une expression en x par t, donc on ne définit pas x(t) mais plutôt t(x) et il faut commencer par calculer x(t) avant de pouvoir calculer x'(t)dt.
Mais attention aux bornes de l'intégrale : si, par exemple, x varie initialement de a à b , t variera de t(a) à t(b) . Finalement, on a : $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{t=t(a)}^{t=t(b)} g(t)x'(t)dt$

1) Dans f, on fait un changement de variable f(x) = g(t).
2) on remplace dx par x'(t).dt .
3) on s'assure qu'on sait calculer la primitive de g(t).x'(t).
4) on remplace les bornes de l'intégration en x par les bornes de l'intégration en t et on procède au calcul

Exemple : soit à calculer I=$\int_1^3 (3x+2)^2\,dx$.

On sait que $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2. Mais quelle est la primitive de $(3x+2)^2$?

Essayons le changement de variable **t = 3x+2** .
En appliquant dt=t'(x).dx il vient dt = 3 dx ou dx=dt/3 .
Et on pourra transformer $(3x + 2)^2$ en $t^2 = g(t)$.
Sous l'intégrale on aura donc $\int 1/3\ (t)^2.dt$ qu'on transformera en $1/3 \int t^2 dt$.
Et cette fois, on connaît la primitive de t^2
Mais attention si x varie de 1 à 3 , t = 3x + 2 varie de 5 à 11 . On obtient :

I = $\frac{1}{3}\int_5^{11} t^2\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_5^{11} = \frac{1}{9}(11^3 - 5^3)$ que nous vous laissons le soin de calculer.

Intégration par partie (i.p.p)

La méthode découle du constat suivant : si u et v sont des fonctions de x, on a **(u.v)' = u'v + v'u** .
On ne connait aucune primitive de f(x) mais on peut considérer f(x) comme un produit : f(x) = u'v ou f(x) =uv'.
Cela est toujours possible en décidant par exemple que f(x) =u et 1 = v' ce qui donnera u' =f '(x) et v = x.
On peut donc écrire que $\int_a^b (uv)' = \int_a^b uv'dx + \int_a^b u'v\,dx$ l'intégrale recherchée étant l'une de ces 2 intégrales.
En supposant qu'on ne sache pas calculer $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b uv'dx$ mais qu'on sache calculer $\int_a^b u'vdx$ = A.
On peut écrire que $\int_a^b (uv)' = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b u'v\,dx$ et comme uv est la primitive de (uv)' on a
$\int_a^b f(x)dx = [uv]_a^b$ – A ce qui permet d'évaluer l'intégrale cherchée.

Si f(x) est un produit de fonctions usuelles comme dans I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$, on peut choisir soit
u = x et **v' = cos x,** soit **u = cos x** et **v' = x** . En général, ce choix n'est pas indifférent.
● Mais on doit connaître la primitive de **u'v** . Ou l'on doit savoir exprimer ∫ **u'vdx** en fonction de I (par exemple sous la forme λI) . Si ce n'est pas le cas, inutile d'aller plus loin. À moins qu'une nouvelle intégration par parties, cette fois sur ∫**u'vdx** finisse par déboucher.

Exemple : calculer I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$. On ne connaît pas la primitive de **xcosx.**
On essaie une intégration par parties : on pose **u=x** , **v'=cosx** donc on évalue **u'= 1** et **v = sinx** .
On connaît la primitive de **u'v = sin x** , donc applique la formule i.p.p :
[xsinx] = ∫ **sinx dx** + <u>∫ x cosx dx</u> ⇨ I = [xsinx] – ∫ **sinx dx** = [xsinx] – **[−cosx]**

$[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ et $[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = +1$ donc

I = $\frac{\pi}{2} - 1$

Expressions rationnelles

Cas particuliers

P est un polynôme de R[X] et P' sa dérivée

● La primitive de $\frac{P\prime}{P}$ est ln |P| Exemple : $\int \frac{2x}{x^2+5}$= ln | x^2 + 5| = ln (x^2 + 5)

● La primitive de $\frac{P\prime}{P^n}$ est $-\frac{1}{n-1}.\frac{1}{P^{n-1}}$ Exemple : $\int \frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^4} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{(x^3+2x)^3}$

● **Les fonctions contenant des exponentielles** (e^{ax}) se ramènent au cas général par le changement de variable

t = e^{ax} d'où on tire dt = at.dx et par conséquent dx = $\frac{1}{at}$dt ce qui nous fait souvent déboucher sur l'intégration d'une fraction rationnelle une fois le changement de variable opéré.

Exemple : $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt = ln\left|\frac{t}{1+t}\right| =$
$ln\frac{e^x}{e^x+1} = x - ln(e^x + 1)$

$\boxed{Jn= \int \frac{tdt}{(1+t^2)^n}}$

Si n=1 → J = $\frac{1}{2}$ ln(1+t^2)

Si n >1 on pose U =1+t^2 d'où dt=$\frac{du}{2t}$ et Jn =$\int \frac{dU}{2U^n} = \frac{1}{2(1-n)U^{n-1}} = \frac{1}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}}$

Les intégrales de type Jn = $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec polynôme non factorisable dans R se ramènent à

$\boxed{k\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}}$

Après avoir considéré ax^2+bx comme le début de a(x+$\frac{b}{2a}$)^2 On obtient a(x+$\frac{b}{2a}$)^2 +C , on divise par C , on fait rentrer a/C dans la parenthèse et on fait le changement de variable parenthèse = t.

Si n = 1 J1 = $\int \frac{dt}{1+t^2}$ → J1 = Arc tan (t)

Si n > 1 on procède par récurrence
En intégrant par partie u = $\frac{1}{1+t^2}$ et v' = 1 on obtient
u' v = -2$\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ = -2$\frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}$ = -2$\frac{1}{1+t^2}$ +-2$\frac{1}{(1+t^2)^2}$
On a donc
[$\frac{t}{1+t^2}$] = $\int uv'$ +$\int u'v$ = J1 - 2J1 - 2J2 d'où on tire J2 en fonction de J1 (Arc tan (t))
De proche en proche on peut calculer J3, J4 etc ..

Décomposition unique d'une expression rationnelle en éléments simples

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ = E(x) + une suite dont les éléments sont de la forme $\frac{A}{(x-a)^n}$ ou $\frac{Bx+C}{(D2(x))^n}$ où

Les (x-a)^n et les d2(x)^n. sont les polynômes irréductibles (sans autre diviseur qu'eux même) qui divisent Q(x).
E(x) est le quotient entier de la division euclidienne de P(x) par Q(x) (1er reste de degré plus petit que Q(x)).

E(x)=0 si le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.
E(x) = un réel K si numérateur et dénominateur sont de même degré.
E(x) est un polynôme de degré d si degré du numérateur – degré du dénominateur = d.

A,B,C sont des réels
D2(x) un polynôme de degré 2 à déterminant Δ négatif (pas de racine réelle mais 2 racines complexes)
Dans (x -a)^n , a est une racine réelle de Q(x) dont n est l'ordre de multiplicité.
En outre si n est plus grand que 1 on va trouver n éléments de la forme $\frac{A_p}{(x-a)^p}$ où p variera de n à 1**.**
Idem pour (D2(x))^n. On retrouve n termes de dénominateur (D2(x))^p où p varie de 1 à n.
Ce que traduit l'égalité suivante où E(x) = 1 car le numérateur et le dénominateur développé ont x^8 pour terme de plus haut degré :

$$\frac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}=1+\boxed{\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}}+\boxed{\frac{d}{X-2}}+\boxed{\frac{eX+f}{\left(X^2+1\right)^2}+\frac{gX+h}{X^2+1}}.$$

Au dénominateur, $X-1$ est à la puissance 3, donc la décomposition en éléments simples contient trois termes.

Comme $X-2$ est à la puissance 1, un seul terme.

X^2+1 est à la puissance 2, donc deux termes.

Exemple $\quad \frac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\frac{1}{5(X-1)^2}-\frac{2}{25(X-1)}+\frac{2X-3}{25\left(X^2+4\right)}.$

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$: $\quad\bigstar\quad \frac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{cX+d}{X^2+4}.$
- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 : $\quad a=\frac{1}{5}.$
- **Calcul de c et d :** Le polynôme X^2+4 admet $2i$ et $-2i$ pour racines. On multiplie $\bigstar$ par X^2+4 puis on évalue en $2i$: $\quad 2ic+d=\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3+4i}{25}.$ Or c et d sont des RÉELS, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $\quad c=\frac{2}{25}\quad$ et $\quad d=-\frac{3}{25}.$
- **Calcul de b :** On multiplie $\bigstar$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $\quad 0=b+c,\quad$ ce qui donne finalement : $\quad b=-c=-\frac{2}{25}.$

Autre exemple $\frac{2x+3}{(x+3)^3}=\frac{A}{(x+3)^3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x+3}$

Je multiplie par (x+3)^3 et je fais x= -3 → – 3 = A
Je multiplie par x+3 et fais tendre x vers ∞ → 0 = C .
J'élimine le 3^e terme
Je multiplie par (x+3)^2 et je fais tendre x vers ∞ → 2 = B

Après on intègre facilement les éléments simples.

Intégrales trigonométriques

Exprimer cos(x), sin(x), tan(x) en fonction de t = $\tan(\frac{x}{2})$

On part de
Sin (x) =sin$(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})$ = 2 sin$(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})$
Cos(x) = cos $(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})$ = cos^2 $(\frac{x}{2})$ – sin^2 $(\frac{x}{2})$
Tan(x) = $\frac{sin(x)}{cos(x)}$ = $\frac{2\sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})}{cos^2(\frac{x}{2}) - sin^2(\frac{x}{2})}$ et quand on divise num et den par cos$^2(\frac{x}{2})$ on trouve $\boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$

Et on utilise aussi
Tan^2(x) =$\frac{sin^2}{cos^2}$ = $\frac{1-cos^2}{cos^2}$ = $\frac{1}{cos^2}$ –1 ou $\boxed{\cos^2(x) = \frac{1}{1+tan^2(x)}}$ et $\boxed{\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = \frac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)}}$

Ou $\boxed{\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+t^2}}$ et $\boxed{\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{t^2}{1+t^2}}$

Qu'on va utiliser ci-après :

On part de Sin x = 2 sin$(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})$ on pose sin$(\frac{x}{2})$ = t . cos$(\frac{x}{2})$ d'où sin(x)= 2t . cos$^2(\frac{x}{2})$ = $\boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$

On part de Cos(x) = cos^2 $(\frac{x}{2})$ – sin^2 $(\frac{x}{2})$ et on remplace par les valeurs en fonction de t = $\boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

Applications

■ généralement on remplace cos(x), sin(x), tan(x) par leur valeur en fonction de t =tan$(\frac{x}{2})$ et dx par $\frac{2dt}{1+t^2}$ on obtient une fraction et on sait intégrer

■ $\int \frac{1}{cos^n(x)}dx$ avec n pair on écrit n = 2p et comme cos^2(x) =$\frac{1}{1+tan^2(x)}$ l'intégrale devient $\int(1+tan^2(x))^p\,dx$
Ensuite on pose tan(x) = t ou x= arctan(t) on dérive dx= $\frac{dt}{1+t^2}$ ce qui revient à intégrer $\int(1+t^2)^{p-1}dt$
On développe et on intègre le polynôme..
On procède identiquement si on a des sinus au lieu de cosinus.

■ $\int \frac{1}{cos^n(x)}dx$ avec n impair on écrit n = 2p+1 . Cette fois on pose t = tan$(\frac{x}{2})$ et dx= $\frac{2dt}{1+t^2}$ on obtient un truc qui ressemble à $\frac{1}{2^{2p}}$ $\int\frac{(1+t^2)^{2p}}{t^{2p+1}}$ facile à intégrer

■ Si on a un truc de la forme $\int cos^n$ ou $\int sin^n$ ou $\int sin^n cos^p$ on emploie Euler et après développement on regroupe les termes qui forment des sinus et des cosinus.
Pour retrouver Euler on s'appuie sur e^{ix}=cos(x)+isin(x) d'où e^{-ix} =cos(x)-isin(x)

■ si on a des trucs de la forme ∫ sin px cos qx ou ∫ sin px sin qx ou ∫ cos px cos qx on utilise
- sin a cos b = $\frac{1}{2}$ [sin (a+b) + sin (a–b)]
- sin a sin b = $\frac{1}{2}$ [cos (a–b) – cos (a+b)]
- cos a cos b = $\frac{1}{2}$ [cos (a+b) + cos (a–b)]

On a à intégrer $\int$ f(cos x , sin x) dx , f étant un polynôme ou une fraction rationnelle

Méthode générale :

Si on pose **t = tan(x / 2)** on peut écrire

Sin x = $\frac{2t}{1+t^2}$ **Cos x** = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **Tan x** = $\frac{2t}{1-t^2}$ et de x=2Arc tan t +2kπ on déduit **dx** = $\frac{2dt}{1+t^2}$

Dés lors, f est transformée en une fraction rationnelle en t et notre étude rejoint la précédente.

Simplifications :

- Si **f(x)dx=f(–x)d(–x)** (f impaire) on posera **u = cos x** → x = Arc cos u → dx = (-1 / $\sqrt{1-u^2}$)du
- Si **f(x)dx = f(π – x)d(π – x)** , on posera **u = sin x** → x = Arc sin u → dx = (1 / $\sqrt{1-u^2}$)du
- Si **f(x)dx = f(π + x) d(π + x)** on posera **u = tan x** → x = Arc tan u → dx = (1/ (1+u^2)) du

Attention : Il faut que ces fonctions soient bijectives sur les intervalles d'intégration pour que les fonctions réciproques soient définies.

Primitives de $\int$ sin px cos qx $\int$ sin px sin qx $\int$ cos px cos qx où p et q sont entiers.

On a

- sin a cos b = $\frac{1}{2}$ [sin (a+b) + sin (a–b)]
- sin a sin b = $\frac{1}{2}$ [cos (a–b) – cos (a+b)]
- cos a cos b = $\frac{1}{2}$ [cos (a+b) + cos (a–b)]

À partir de là, on sait faire.

Primitives de la forme $\int$ cos ^{p} x sin ^{q} x ou $\int$ cos ^{p} x ou $\int$ sin ^{p} x où p et q sont des entiers

On utilise les formules d'Euler cos x = $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et sin x = $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

On développe cos ^{p} x et (ou) sin ^{q} x , on regroupe les termes qui ont des exposants opposés et on obtient pour chaque développement une somme de termes de la forme $\sum a_k \cos kx$ ou $\sum b_k \sin kx$.
Dés lors, on retombe sur une forme de primitive connue ,
soit $\int \Sigma a_k \cos kx$,
soit $\int \Sigma b_k \sin kx$
soit $\int \Sigma a_k b_{k'} (\sin k'x)(\cos kx)$

Exemple : $\cos^3 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3^{eix}e^{-2ix} + e^{-3ix})$

$$=\frac{1}{4}(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}) + \frac{3}{4}(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

On sait calculer une primitive de cette expression et si on la multipliait par **sin ^{p} x** sous la même forme, le produit obtenu ne poserait pas plus de problème puisqu'on sait intégrer $\int$ **sin px cos qx**

Primitives de la forme $I_n = \int \cos^{-n} x$ ou $J_n = \int \sin^{-n} x$ où n est un entier naturel

● **Si n est pair** , on pose n = 2p puis on pose **t = tan(x)**

$I_{2p} = \int (1+t^2)^{p-1} dt$: un polynôme qu'on développe avant de l'intégrer.

En particulier si p = 1 : $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x$

Pour calculer J_{2p} on commence par le changement de variable **y = π/2 – x** : sin (π/2 – y) = cos y

Ce qui nous ramène au cas précédent.

● **Si n est impair** , on pose n = 2p +1

Pour J_{2p+1} on procède au changement de variable **t = tan (x / 2)** $J_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p}} \int \frac{(1+t^2)^{2p}}{t^{2p+1}}$

Une fraction rationnelle simple à décomposer et à intégrer pour p petit (dénominateur en t^k).

Par exemple : $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |\tan (x/2)|$

Le calcul de I_{2p+1} se ramène au précédent en posant **y = π/2 – x** : cos (π/2 – y) = sin y

Par exemple $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{-dy}{\sin y} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\tan (y/2)| = -\ln |\tan (\pi/4 - x/2)|$

Primitives de la forme $I_n = \int \tan^n x$ où n est un entier

● **Si n est négatif** on pose **y = π/2 – x** et $\tan^n x = \tan^{-n} y$ (on retrouve le cas où n est positif)

● **Si n est positif et impair** n = 2p +1 on pose **t = cos 2x** : $I_{2p+1} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt$

On procède à un autre changement de variable **u = 1 + t** qui nous permet de décomposer facilement I_{2p+1} en intégrales simples.

● **Si n = 1** il est plus simple de faire le changement de variable **t = cos x**

Puisque $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et dt = – sin x dx on a $\int \tan x = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\cos x|$

● **lorsque n est positif impair ou pair** on peut aussi poser **t = tan x** et on a $I_n = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

Une fois calculée la partie entière de la fraction, son reste est facile à intégrer .

Par exemple $t^3 = (1 + t^2)\, t - t$. La partie entière de la fraction est t et on connaît la primitive de $-\frac{t}{1+t^2}$.

C'est $-\frac{1}{2} \ln(1 + t^2)$.

Intégrales de Walis

$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \,.\, dx$ où m est un entier naturel

On pose $u = \sin^{m-1}x$ et $v' = \sin x$ → $u' = (m-1)(\cos x)(\sin^{m-2} x)$ et $v = \cos x$

D'où l'on déduit : $I_m = \left[-\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x \right]_{(0\,,\,\pi/2)} + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

- si m est pair (m=2p) on a $I_m = \frac{1x3x5x\ldots.x(2p-1)}{2x4x6x\ldots.x2p} \cdot \frac{\pi}{2}$

- Si m est impair (m = 2p+1) on a $I_m = \frac{2x4x6x\ldots x2p}{3x5x7x\ldots.x(2p+1)}$

Avec :

$2x4x6x..x2p = 2^p (p\,!)$

Et $3x5x7x..x(2p-1) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)}$

Remarquons que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \,.\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \,.\, dx$ (changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$)

On montre, en encadrant les intégrales que I_m est une suite décroissante et que $\lim (I_{m+1} / I_m) = 1$

Donc $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{2^p(p!)2^p(p!)2^p(p!)2^p(p!)}{(2p)!(2p+1)!} = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = (2p+1) \lim (I_{2p+1})^2$ et

$I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Primitives d'expressions avec radicaux

Nos primitives de référence sont

$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Arcsin x**	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Arccos x**	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	**Arg sh x**	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	**Arg ch x**

Avec, si l'on veut **Arg sh x = ln |x+$\sqrt{x^2+1}$|** et **Arg ch x = ln |x+$\sqrt{x^2-1}$| et |x| $\geqslant$ 1**

● Plus généralement , si k est une constante et u une variable

$\frac{1}{\sqrt{k^2-u^2}}$	**Arc sin $\frac{u}{k}$** (●)	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Arc cos $\frac{u}{k}$**	$\frac{1}{\sqrt{u^2+k^2}}$	**Arg sh $\frac{u}{k}$**	$\frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}}$	**Arg ch $\frac{u}{k}$** (●)

(●) **avec k > u** (●) **avec u > k**

Avec si l'on veut Arg sh $\frac{u}{k}$ = ln |u + $\sqrt{u^2+k^2}$| et Arg ch $\frac{u}{k}$ = ln |u + $\sqrt{u^2-k^2}$|

Primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

● Si a = 0 la primitive est $\frac{2}{b}\sqrt{bx+c}$

● si a ≠ 0 on écrit le polynôme sous la forme a [($x+\frac{b}{2a})^2 \pm K^2$] soit a [$u^2 \pm K^2$] et la solution est triviale.

Primitives de la forme $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

On se ramène au cas précédent en posant **t =** $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{px+q}}$ $\rightarrow$ $\frac{dx}{px+q} = -\frac{dt}{t}$ et x=$\frac{1-qt}{pt}$

Finalement on doit intégrer – $\int \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{(\mathbf{aq^2-bpq+cp^2})\mathbf{t^2+(bp-2aq)t+a}}}\mathbf{dt = -p}\int\frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{At^2+Bt+C}}}$

Primitives de la forme $\int \sqrt{ax^2+bx+c}$

● Si a = 0 la primitive est $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3b}}(\mathbf{bx+c})^{\frac{3}{2}}$

● Si a ≠ 0 , on écrit le polynôme sous la forme a [$u^2 \pm K^2$] ou si a < 0 : |a|[$K^2 \pm u^2$]
Selon ce qu'il y a sous le radical, on fait les changements de variables suivants qui nous ramènent à des intégrales connues :

● $\mathbf{k^2(1-\frac{u^2}{k^2})}$ → on pose $\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{k}}$ = sin t et on a $\cos^2$ t sous le radical → $k^2 \int \cos^2 t\, dt$ = $\frac{\mathbf{k^2}}{\mathbf{2}}$ ∫ (1+cos 2t) dt

● $k^2(1+\frac{u^2}{k^2})$ → on pose $\frac{u}{k}$ = sh t et on a ch^2 t sous le radical →$k^2 \int \text{ch}^2 t\, dt$ =$\frac{k^2}{2}$∫ (1+ch 2t) dt

● $k^2(\frac{u^2}{k^2}-1)$ → on pose $\frac{u}{k}$ = ch t et on a sh^2 t sous le radical →$k^2 \int \text{sh}^2 t\, dt$= $\frac{k^2}{2}$∫ (ch 2t – 1) dt

Primitives de la forme $\int f(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ ou $\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$ où f est une fraction rationnelle.

On prend pour variable u = $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ → x = $\frac{b-du^2}{cu^2-a}$ et dx=$2\,\frac{ad-bc}{(cu^2-a)^2}udu$

Ce qui nous ramène à l'intégration d'une fraction rationnelle.

Primitives de la forme $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ où f est une fraction rationnelle

On met le polynôme sous le radical sous la forme canonique et selon sa forme :

- $k^2(1-\frac{u^2}{k^2})$ → on pose $\frac{u}{k}$ = sin t et on a $\cos^2$ t sous le radical
- $k^2(1+\frac{u^2}{k^2})$ → on pose $\frac{u}{k}$ = sh t et on a ch^2 t sous le radical
- $k^2(\frac{u^2}{k^2}-1)$ → on pose $\frac{u}{k}$ = ch t et on a sh^2 t sous le radical

Il nous reste une fraction rationnelle avec des formes trigonométriques ou hyperboliques qu'on devrait savoir résoudre, au prix d'un nouveau changement de variable.

Convergence

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $\lim\limits_{\infty} \int_a^x f(x)dx$ existe
$\int_a^b f(x)dx$ converge si $\lim\limits_{a\leftarrow} \int_x^b f(x)dx$ existe (limite à droite)

Il en découle que …
Si f et g continues sur leurs intervalles d'intégration et que leur intégrale soit convergente alors si A et B sont des réels, l'intégrale de Af + Bg est convergente sur le même intervalle d'intégration.

A et B réels, f et g continues, $\int f$ et $\int g$ convergent alors $\int Af + Bg$ converge

■ Si on connait une primitive F de f, l'étude de la convergence se ramène à un calcul des limites de F dans l'expression F(b) -F(a) où a et b sont les limites éventuellement infinies du domaine d'intégration.

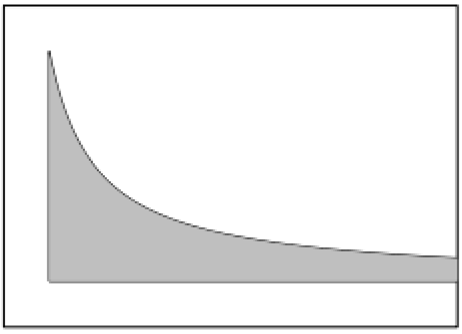
$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [arc\tan(x)]_0^{+\infty}$ avec arc tan(0)=0 et arc tan(+∞) → $\pi/2$ donc J converge vers $\pi/2$

J = $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = [ln(1+x)]_1^{+\infty}$ ne converge pas car $\lim\limits_{+\infty} ln(1+x) = \infty$

J = $\int_0^1 ln(t)dt = \lim\limits_{0\leftarrow}[t.ln(t) - t]_x^1$ = –1 –$\lim\limits_{0\leftarrow}(t.ln(t) - t)$ et comme t.ln(t) →0 J→-1 converge

Rappel : $\lim\limits_{0\leftarrow} x.ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$.

■ Utilisation de fonctions majorantes ou minorantes et des équivalents.



Théorèmes de comparaison et des équivalents

f étant continue et positive on a un problème pour démontrer la convergence de $\int_a^b f$ au voisinage de b qui peut être ∞.
S'il existe une fonction g > f au voisinage de b

- ■ si $\int_a^x g$ est convergente quand x → b alors $\int_a^b f$ converge
- ■ si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.
- ■ si $\lim\limits_{b} \frac{f(t)}{g(t)}$ = 1 on a : convergence de $\int_a^b g$ ⇔ convergence de $\int_a^b f$

On utilise souvent des résultats tels que $\lim\limits_{\infty} \frac{t^p}{e^t}$ = 0 , ou $\lim\limits_{0\leftarrow} \frac{t^{1/4}}{(-ln(t))^p}$ <=1

Riemann $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^p} dt$ converge si p >1 diverge si p<=1 ■ $\int_0^1 \frac{1}{t^p} dt$ converge si p <1 diverge si p>=1

Riemann 1 : Si f positive $\int_a^{\infty} f(t)dt$ converge si ∃ p>1 tel que $\lim\limits_{\infty} t^p.f(t)$ < 1 (ou f(t) < $\frac{1}{t^p}$)

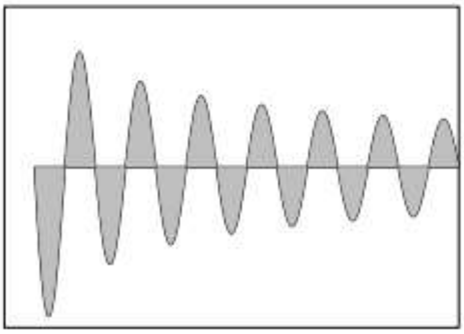
Riemann 2 : Si f positive $\int_0^1 f(t)dt$ converge si ∃ p<1 tel que $\lim\limits_{0} t^p.f(t)$ < 1 (ou f(t) < $\frac{1}{t^p}$)

Bertrand $\int_2^{\infty} \frac{1}{t(ln(t))^p}$ converge si p >1 et diverge si p<=1 .

Par exemple dans les deux exemples qui suivent on va utiliser $\lim\limits_{\infty} \frac{f(t)}{\text{équivalent à l'infini de } f}$ =1 pour démontrer que f converge. Il suffit de découper $\int_a^{\infty} f$ en $\int_a^b f + \int_b^{\infty} f$ en prenant b assez grand pour faire l'amalgame f et son équivalent.

■ $\int_2^{\infty} \sqrt{t^2+3t}\,.ln(cos(\frac{1}{t})).sin^2(\frac{1}{ln(t)})dt$
On cherche les équivalents à l'infini.
Pour $\sqrt{t^2+3t}$ ou t $\sqrt{1+\frac{3}{t}}$ c'est t.
Pour $ln(cos(\frac{1}{t}))$ → développement limité du cos → ln(1-$\frac{1}{2t^2}$) → développement limité ln(1+x) → $-\frac{1}{2t^2}$
Pour sin^2($\frac{1}{ln(t)}$) on utilise que sin(x) équivaut à x au voisinage de 0 donc équivalent $\frac{1}{(ln(t))^2}$
Au total au voisinage de l'infini $\int_a^{\infty} \sqrt{t^2+3t}\,.ln(cos(\frac{1}{t})).sin^2(\frac{1}{ln(t)})dt \sim \int_a^{\infty} -\frac{1}{2t.(ln(t))^2}$ et Bertrand nous dit que ça converge puisque p = 2.

■ Pour $\int_1^{\infty} \frac{t^5+3t+2}{t^3+4} e^{-t}\,dt$ on a l'équivalent à l'infini t^2 e^{-t} et on sait que la limite est 0 → ça converge



Fonctions oscillantes

■ f absolument convergente si $\int |f(t)|dt$ converge.
■ Si f absolument convergente alors f est convergente
■ Si f positive décroissante et $\lim_{\infty} f$ =0 si g continue et $\int_a^x g$ bornée

alors $\int_a^{\infty} f(t).g(t)\,dt$ converge (**Théorème d'Abel**)

■ Si 1 < n < p et $\frac{f(t)}{t^{p-n}}$ est bornée sur l'intervalle d'intégration

$alors\ \int_a^{\infty} \frac{f(t)}{t^p}\,dt$ est absolument convergente (moins utile)

Dirichlet $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ dt = $\frac{\pi}{2}$

J=$\int_1^{\infty} \frac{sin(t)}{t^2}$ |f | est majorée par $\frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale (de Riemann) converge. Donc J absolument convergente. Quand on étudie l'absolue convergence sur [a,+∞[on peut essayer de majorer ou minorer par exemple Un =$\int_{n2\pi}^{(n+1)2\pi} f(t)|cos(t)|\,dt$. Un < $Max_{[I]}$ f(t) $\int_{n2\pi}^{(n+1)2\pi} |cos(t)|\,dt$. L'intégrale étant constante sur ces intervalles du fait de la périodicité du cos. Si la suite Un est croissante et non bornée l'intégrale est divergente.

Plan d'étude

1. Si on sait calculer une primitive F de f on étudie la convergence de F(b) – F(a)

2. Sinon on identifie les points incertains (∞, 0 , 1 ou autres)

3. On scinde l'intégrale de l'étude en une intégrale convergente + une autre dont on étudie la limite

Par exemple $\int_a^{\infty} f\ = \int_a^b f + \lim_{\infty} \int_a^x f(t)dt$. On fait la même chose pour chaque point incertain.

On se ramène autant que possible à des bornes positives au besoin en faisant le changement de variable t → -t

4. Si la fonction est de signe constant soit on raisonne sur les équivalents autour du point incertain, soit on utilise le théorème de comparaison avec une fonction majorante à intégrale convergente.

5. Si la fonction oscille on essaie de démontrer qu'elle est absolument convergente. Ou on utilise le théorème d'Abel en décomposant f en 2 fonctions dont l'une est positive et décroit vers 0 quand x → ∞ et l'intégrale de l'autre est bornée sur [a,x].

En somme on doit faire les tests suivants

■ Peut-on calculer la primitive ?
■ si borne infinie, la fonction est-elle le produit d'une fonction qui → 0 par une fonction bornée ?
■ En remplaçant les composants de f(x) par leur équivalent aux points limites est-ce que ça converge/diverge ?
■ Peut-on trouver une fonction majorante qui converge ? Ou une fonction minorante qui diverge ?
■ Si f(t) est positive et $\int_a^{\infty} f(t)dt$ existe -t-il un nombre p >1 tel que $\lim_{\infty} t^p f(t)$ = 0 ?
■ Par un changement de variable peut-on ramener f à une comparaison avec Riemann, ou Bertrand ?
■ L'intégrale est-elle absolument convergente ?
■ Sinon une intégration par partie débouche-t-elle sur l'une des solutions précédentes ?

<u>On note tout l'intérêt de connaître les limites impliquant les fonctions usuelles (sin , exp, ln) et les développements limités les plus utiles</u>.