Déterminant d’une matrice carrée

Ordre 2 :

le déterminant de M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est noté $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et évalué à **det (M) = ad – bc**

Le déterminant d’une matrice est donc un nombre réel obtenu en combinant ses coefficients selon une recette particulière.
Ceci dit, on va voir que quand on sait calculer le déterminant d’ordre n , on sait aussi calculer le déterminant d’ordre n+1.
Ce qui signifie que si l’on sait calculer un déterminant d’ordre 2, on va pouvoir, sans trop de difficultés, calculer les déterminants d’ordre 3, 4, et plus.

Ordre 3 :

Comment calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$?

● Les signes affectés aux coefficients (**signes de position**) seront :

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ On attribue un **+** à $\mathbf{a_{11}}$ puis on alterne dans une ligne ou colonne quand l’indice croit

● En barrant la 1ere colonne et successivement la 1ere ligne puis la 2e , puis la 3e , comme dans l’encadré ci-dessous, ce qui reste visible dans chaque cas est une matrice d’ordre 2 dont on sait calculer le déterminant .
On calcule <u>ce déterminant affecté du signe de position de a_{ik}</u> et on appelle le résultat **cofacteur de a_{ik}** , a_{ik} étant le coefficient de la première colonne dont la ligne a été barrée.
Le cofacteur de a_{ik} est un nombre que nous noterons **c (i , k)**

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\quad C(1,1) = + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = +\ (ei - hf)$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\quad C(2,1) = - \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} = -\ (bi - hc)$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\quad C(3,1) = + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = +\ (bf - ec)$

● Le déterminant de la matrice d’ordre 3 est égal à la **somme des a_{ik} . c(i,k)**

det (M) = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ = **+a (ei – fh) – d (bi – hc)+ g (bf – ec)**

● cette façon de faire utilise pour le calcul exclusivement les coefficients de la 1ere colonne et leur cofacteur.
On dit qu’<u>on développe le déterminant par rapport à la première colonne</u> mais on aurait pu le développer de la même façon par rapport à n’importe quelle colonne ou n’importe quelle ligne.

● Si on développe le déterminant par rapport à la 1ere colonne, il revient au même d'affecter à **a** le signe **+** , à **d** le signe **–** et à **g** le signe **+** . On multiplie chaque coefficient affecté de son signe par le déterminant de la matrice d'ordre 2 qu'on obtient en barrant la ligne et la colonne du coefficient et on fait la somme.
Mais on ne perd pas de vue qu'en réalité c'est c (i , k) qui intègre le signe de position.
Chaque coefficient de la matrice a un cofacteur construit en affectant de son signe de position le déterminant obtenu quand on barre sa ligne et sa colonne.
Par exemple, c (2 , 2) cofacteur de a_{22} est

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad C\ (2\ ,\ 2) = + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} = +\ (ai - gc)$$

● Tout coefficient ayant un cofacteur ; il est possible de développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne, mais exclusivement par rapport à une ligne ou à une colonne. Dans chaque cas, **le déterminant calculé sera le même nombre**.

Plus il y a de 0 dans une ligne ou une colonne plus on a intérêt à développer le déterminant par rapport à elle. Les calculs s'en trouvent facilités.

Remarques :
● Quel que soit l'ordre de la matrice, la règle qui permet d'affecter les signes de position est la même
● On peut définir un déterminant d'ordre 1 comme le nombre qui reste visible quand on barre une ligne et un colonne dans une matrice d'ordre 2 . Dans ce cas, la procédure qui nous permet de calculer un déterminant d'ordre 2 connaissant les déterminants d'ordre 1 est la même que celle qui nous permet de calculer un déterminant d'ordre 3 connaissant les déterminants d'ordre 2.
Quand on sait calculer un déterminant d'ordre 3 , on sait calculer un déterminant d'ordre 4 .
● Par récurrence, on peut calculer tous les déterminants quel que soit leur ordre.

Propriétés des déterminants
● Si on appelle L1, L2 , L3 les vecteurs lignes de la matrice M et C1, C2, C3 ses vecteurs colonnes qu'on sait appartenir à l'espace vectoriel R^n (K^n dans le cas général) .
On peut noter det (M) soit det (L1, L2, L3) soit det (C1, C2, C3)

Alors, on a **det (L1, L2, L3) + det (L1, L'2 , L3) = det (L1, L2+L'2 , L3)**
Idem pour les colonnes

Et **det (L1 , λL2 , L3) = λ det (L1, L2 , L3)**
Idem pour les colonnes.

Donc si A et B sont des vecteurs fixes et X un vecteur variable
on peut considérer que l'application **X ⟶ det (A, X, B)** est une **application linéaire** de R^n dans R .

● **Règle importante** : si le déterminant d'une matrice est **non nul**, la matrice est **inversible** et si il est nul, la matrice n'est pas inversible

Pratiquement
● Si deux lignes sont identiques ou si l'une est le produit de l'autre par un scalaire (L3 = λL1) (système lié , matrice non inversible), le déterminant est nul
det (L1, L1, L3) = 0
● Donc , si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres le déterminant est inchangé
det (L1, $L2+K_1L1+K_2L3$, L3) = det (L1,L2,L3) + K_1 det (L1,L1,L3) + K_2(L1,L3,L3) =
Det(L1,L2,L3)+0+0

● On a donc intérêt à ajouter à une ligne (ou colonne) d'autres lignes ou combinaisons d'autres lignes (ou colonnes) pour obtenir un maximum de coefficients nuls dans cette colonne et développer le déterminant par rapport à cette ligne (ou colonne). Le calcul en sera facilité.

● Si on échange deux lignes le déterminant est multiplié par -1 :

det(L1,L2,L3) = – det (L2,L1,L3)

En effet :
det(L1,L2,L3) = det(L1+L2,L2,L3)=det(L1+L2, -L1,L3)=det(L2,-L1,L3) = – det(L2,L1,L3)
On remplace L1 par L1+L2 puis L2 par L2 – (L1+L2) , puis L1+L2 par (L1+L2) – L1, puis linéarité

● Si A est une matrice de M_n **det(**λ **A) =** λ^n **det (A)**

● le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale

Calcul de la matrice inverse à partir des cofacteurs et du déterminant

Cofacteurs

Quand je développe le déterminant par rapport à la colonne 1 j'ai une formule du type
Det (M) = a_{11} **. C(1, 1) +** a_{12} **. C (1,2) + …. +** a_{1n} **. C(1,n)**
C(i , k) incluant le signe de position
Idem quand je développe le déterminant par rapport à une autre colonne ou à une autre ligne.
Donc, à chaque a_{ik} il correspond un nombre C (i , k) qu'on appelle son **cofacteur** .
C'est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne k , affecté du signe de position .

Cofacteurs et matrice inverse

En calcul ant tous les cofacteurs, je peux faire correspondre à la matrice M une matrice dont les coefficients b_{ik} sont de la forme $\frac{C(i,k)}{det(M)}$. J'appelle cette matrice m .

● On obtient la matrice **transposée** ${}^tM$ d'une matrice M en échangeant ses coefficients a_{ik} et a_{ki} ce qui revient à construire la matrice symétrique de M par rapport à la diagonale principale.

● **la transposée de m (dérivée de M grâce aux cofacteurs divisés par le déterminant de M) est M^{-1} matrice inverse de M.**

● Exemple

M = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet pour cofacteurs $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et pour déterminant det(M) = 2 – 3 = – 1

La matrice correspondante m obtenue grâce aux cofacteurs divisés par le déterminant est

m = $\begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & \frac{-1}{-1} \\ \frac{-3}{-1} & \frac{2}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

La transposée de m est $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. C'est M^{-1}

En effet si

X = 2x + 3y	on a aussi	x = –X + 3Y
Y = x + y		y = X – 2Y
(Matrice M)		(Matrice M^{-1})

Ceci dit, on a plus vite fait de résoudre le système en considérant que X et Y sont connus et x et y inconnus.