Approximations et développements limités

Table des matières

Fonction négligeable devant une autre ou équivalente à une autre

● h(x) **négligeable** devant f(x) quand x →a si $\lim_{a} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$. **Noté h** $<<_a$ **f** (a peut être ± ∞)

Le signe n'intervient pas, seul l'ordre de grandeur, et +∞ peut être négligeable devant –∞.
Relation **transitive** : h << g et g << f ⇒ h << f

● h(x) **équivalente** à f(x) quand x →a si $\lim_{a} \frac{h(x)}{f(x)} = 1$. **Noté h** $\approx_a$ **f** (a peut être ± ∞)
ou bien encore : h $\approx_a$ f si **f(x) = h(x) (1 + ε (x))** et $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$

● **Relation d'équivalence** : **Réflexive, symétrique, transitive**

● **Compatible** avec << car h << f et f >> F ⇒ h << F

Seuls équivalents admis :

● Si f >> F et g >> G alors fg >> FG et f/g >> F/G
● Si f << g alors f + g >> g
● d'où on tire si f << g et F << G alors $\frac{f+g}{F+G} \approx \frac{g}{G}$
● si f >> F alors f^{a} >> F^{a} (tout α ∈ R)

Les autres équivalents sont à démontrer et à manier avec précaution

Notation de Landau

o (f) : se lit fonction négligeable devant f
Si j'écris pour x prés de 0 : sin x = x + o(x^2) cela signifie sin x – x << x^2
Mais attention : plusieurs fonctions différentes négligeables devant f s'écrivent toutes o(f) .
On peut donc avoir par exemple o(f) + o(f) = o(f)
Aussi pour les calculs, on peut remplacer o(f) par ε(x).f(x) (avec lim ε = 0) et changer de ε à chaque approximation.

Echelle

Base de référence pour le classement de fonctions usuelles dans la relation <<

Echelle des fonctions négligeables l'une par rapport à l'autre à l'infini (à connaître)

$\frac{1}{x} << \mathbf{1} << \mathbf{\ln x} << \mathbf{x} << \mathbf{x^2} << \ldots\ldots << \mathbf{x^n}$ (n > 2) $<< \mathbf{e^x} << \mathbf{a^x}$ (a > e)

Echelle des fonctions négligeables l'une par rapport à l'autre prés de 0 (à connaître)

$\mathbf{x^n} << \ldots << \mathbf{x^2} << \mathbf{x} << \mathbf{1} << \mathbf{\ln x} << \frac{1}{x}$

On peut construire des échelles plus riches et intercaler par exemple les fonctions $x^\alpha (\ln x)^\beta$

Partie principale de f .

Soit C une constante

Définition : On dit que Cf_0 est la partie principale de f si f_0 fait partie de l'échelle et $f >> Cf_0$.
On peut écrire que $f = Cf_0 + o(f_0)$.
On peut provisoirement la noter $PP(f) = Cf_0$ (notation personnelle)

Par exemple pour un polynôme de degré n , à l'infini, $a_n x^n$ est sa partie principale $C = a_n$.

À l'infini, sin x n'a pas de partie principale mais sin x admet x pour partie principale en 0 .

● le C de Cf_0 est unique

● $PP(f.g) = PP(f) . PP(g)$

● $PP(f/g) = PP(f) / PP(g)$

● Si $PP(f) + PP(g) \neq 0$ alors
$PP(f+g) = \text{Sup}(PP(f) , PP(g))$ dans l'échelle ou $PP(f)+PP(g)$ si elles sont du même ordre

Dans ce qui suit les fonctions f_i sont dans une échelle avec $f_n << f_{n-1} << \ldots\ldots << f_0$

1 On a $C_0f_0 = PP(f)$

2 Puis on trouve $C_1f_1 = PP(f - C_0f_0)$ approximation de l'erreur

3 Puis on trouve $C_2f_2 = PP(f - C_0f_0 - C_1f_1)$

4 et ainsi de suite jusqu'à $C_nf_n = PP(f - C_0f_0 - C_1f_1 - \ldots - C_{n-1}f_{n-1})$

5 On en déduit que $\mathbf{f = C_0f_0 + C_1f_1 + \ldots + C_{n-1}f_{n-1} + C_nf_n + o(f_n)}$

Développement asymptotique de f d'ordre n dans l'échelle choisie

Développements limités à l'ordre n

● si l'échelle est celle des x^n et que nous nous situions au **voisinage du 0** nous avons un **développement limité de f à l'ordre n en 0** . Que nous abrègerons en $DL_n(f)$.
$\mathbf{f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) = P(x) + o(x^n)}$ où P(x) est un polynôme de degré n .
Ce polynôme est unique du fait de l'unicité des a_i définissant chaque PP.
On dit soit que P(x) est un DL_n (f) soit que $f(x) = P(x) + o(x^n)$ si on veut être plus précis.

● toutes les fonctions n'ont pas un DL_n en 0 et il arrive, selon l'ordre du développement qu'il faille prendre x très petit pour que $o(x^n)$ devienne vraiment négligeable devant x^n , le voisinage de 0 étant une notion arbitraire.

À connaître par cœur car souvent utiles

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

● **Le DLn de $\frac{1}{1+x}$ est donc $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i$ $= 1 - x + x^2 - x^3 + .. + (-1)^n x^n$**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n)$$

● $$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)$$

● $$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Opérations sur les fonctions et DL

Les DLn sont en général compatibles avec les opérations courantes sur les fractions
● DL (f+g) = DL (f) + DL (g)
● DL (f.g) = DL(f) . DL (g) à condition de supprimer les termes de degré > n
● DL (f/g) = DL (f) / DL (g) (si on sait diviser le polynômes et que le dénominateur n'est pas nul)
● On peut faire un changement de variable de type $X = Kx^\alpha$ (si $x \to 0$ c'est aussi le cas de X)
● DL (g ○ f) = DL (g (f(x)) n'est possible que si f(0) = 0 . Dans DL(g) on remplace x par DL(f) .

Formules de Taylor Lagrange et de Mac Laurin

Si f continûment dérivable jusqu'à l'ordre n sur [a ; b] (donc de classe C^n) et $f^{(n)}$ est dérivable sur [a ;b]

Si h est tel que $a < a+h \leq b$, Il existe θ $(0 < \theta < 1$ donc $a< (a+ \theta h) < (a + h)$ tel que
$\mathbf{f(a+h) = f(a) + hf^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)}$ **Taylor Lagrange**

En particulier si on remplace h par (b – a) on trouve f(b) = …
$f(h) = f(0) + hf^{(1)}(0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h)$ **Mac Laurin**

C'est la même formule avec a = 0 et dans ce cas on peut remplacer h par x pour trouver
$\mathbf{f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)}$

● **Si on se situe maintenant au voisinage de 0 et que $f^{(n+1)}$ soit bornée** , le dernier terme de la somme devient tel que $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) << x^n$ et on peut écrire le DLn :

$$\mathbf{f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad + 0(x^n)}$$

C'est de là que proviennent les DLn.

Quelques utilisations de DL

Pour se livrer aux opérations suivantes, il faut absolument que **f soit de la classe C^n**

● Si f est bijective, on sait que f^{-1} est de classe C^n

On pose DL $(f^{-1}) = a_n x^n +\ldots+a_0$.(a_i inconnus)

Puis on écrit que DL($f \circ f^{-1}$) = x en remplaçant dans le DL(f) x par $a_n x^n +\ldots+a_0$.

Ensuite, on identifie dans DL($f \circ f^{-1}$) les coefficients à 0 sauf celui de x qui est égal à 1.

On trouve ainsi **un DL de f^{-1}** .

● On peut **dériver le DL** de f pour trouver celui de f' (par exemple sinx et cos x)

● On peut **prendre la primitive du DL** de f pour trouver le DL de cette primitive F

Suites et développements de fonctions de C¥ dont le reste tend vers 0

On retrouve dans la suite U_n =1 + 1 + 1/2 ! + 1/3! + …+1/n! le développement limité de e^x pour x=1 mais 1 n'est pas au voisinage de 0 . On se tourne alors vers Mac Laurin et on estime le reste :

$e^\theta / n!$ avec $0 < e^\theta < 1$. Ce qui nous permet de dire que le reste → 0 et que la suite converge vers e.

Calcul de limites en zéro :

On a souvent intérêt à substituer les DL aux fonctions usuelles. (quand ils ont connus).

DL au voisinage d'un point

● **Si on prend une échelle prés de 0**

$\mathbf{x^n} \;<<\; \ldots\ldots \;<<\; \mathbf{x^2} \;<<\; \mathbf{x}$

On peut la transformer en échelle « prés de a >> en remplaçant x par (x-a)

$\mathbf{(x-a)^n} \;<<\; \ldots\ldots \;<<\; \mathbf{(x-a)^2} \;<<\; \mathbf{(x-a)}$

Taylor (ou Mac Laurin) donnent alors dans le voisinage de a

$$\mathbf{f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \quad + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}$$

Et **si $f^{(n+1)}$ est bornée**, on a un **développement limité au voisinage de a** .

Position du graphe de f par rapport à sa tangente en a

L'équation de la tangente à f en a est T(x) = T(a) + (x-a) $f^{(1)}(a)$ et comme T(a) = f(a), on reconnaît les premiers termes de la formule de Taylor T(x) = f(a) + (x-a) $f^{(1)}(a)$.

On en déduit que $f(x) - T(x) = \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)+\ldots$ et au voisinage de a l'étude du signe

de f(x) –T(x) se résout à l'étude du signe du 1er terme non nul de cette suite.

● Si $f^{(2)}(a)$ n'est pas nul, $(x-a)^2$ étant positif f(x)-T(x) est du signe de $f^{(2)}(a)$ que x soit plus grand ou plus petit que a. Donc, localement, la courbe est soit toute au dessus (f(x)-T(x)>0) , soit toute au dessous (f(x)-T(x) <0) de la tangente.

● Si $f^{(2)}(a)$ est nul, le signe de f(x) – T(x) est donné par le signe du 1er $\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ non nul.

Si ce terme est de degré impair, la courbe traverse la tangente puisque le signe de f(x) – T(x) change à droite et à gauche de a (on a un point d'inflexion) . Si il est de degré pair, la courbe reste du même côté de la tangente.

D’un DL à un autre

● Au voisinage de 0

on sait que $\frac{1}{1+x}$ = 1 –x +x^2–x^3+..+$(–1)^n x^n$

On peut écrire f(x)= $\frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{1}{1+x}$ et diviser le DL de $\frac{1}{1+x}$ par $\sqrt{x}$.

Pour trouver que $\mathbf{f(x) = x^{-1/2} - x^{1/2} + x^{3/2} + o(x^{3/2})}$

Les puissances fractionnaires de x qui figurent dans cette somme constituant un échelle décroissante au voisinage du 0 .

● Quand x tend vers l’infini

Quel est le comportement à l’infini de f(x)= $\frac{x^2+1}{x+1}$?

Si dans $\frac{1}{1+x}$ quand x → 0 je fais le changement de variable x = $\frac{1}{x}$ quand X →∞

J’obtiens $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots$ d’où $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$

Donc si je multiplie par x^2+1 f(x)= $\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2+1}{x^2} +$ des termes négligeables quand x →∞

Les seuls termes non négligeables sont donc x – 1 .

Et on retrouve l’asymptote oblique de f , la droite d’équation y = X – 1 .

Mais plutôt que de procéder ainsi, on peut simplement faire la division de X^2+1 par X+1 et on trouvera le même résultat sans changement de variable.

Remarquons que dans un développement à l’infini, on range les termes par puissances décroissantes de x , le " polynôme " se comportant comme ses termes de plus haut degré.