APPLICATIONS

Les relations et leurs propriétés, Les applications et leurs propriétés, ensemble noyau et ensemble image, Composée de deux applications, réciproque d'une application et leurs dérivées.

Définitions et propriétés:

Dans ce qui suit A ➩B se lit « **A** implique B »

X → Y Traduit une correspondance entre **X** et **Y**

● Une **RELATION** R établit un lien entre les éléments d'un ou plusieurs ensembles. Pour signifier que deux éléments x et y sont en relation par R, on écrit x R y , ce qui n'implique pas obligatoirement y R x .
Exemples de relation dans Z : R : « x est plus grand ou égal à y ».
Au lieu d'écrire **x R y** on écrit **x ⩾ y**.

: « x est égal à y » qu'on écrit **x = y**

: « x est égal à y modulo 7 qu'on écrit **x = y mod 7** ou x%7 =y%7
si en faisant la division euclidienne x et de y par 7 on trouve le même reste »

● Une relation peut être

symétrique Pour tout couple (x,y) d'éléments en relation : x R y ➩ y R x (exemple A = Y ➩Y = A)

antisymétrique : Pour tout couple (x,y) d'éléments en relation : x R y et y R x ➩ x = y (exemple X ≤ Y et Y ≤ X ➩ X = Y)

réflexive : Pour tout élément x on a x R x (exemples X ≤ X ou X = X)

transitive : Pour tout triplet (x, y , z) d'éléments en relation : x R y et y R z ➩ x R z (exemple X ≤ Y et Y ≤ Z ➩ X ≤ Z)

● Une **relation d'ordre** est antisymétrique , réflexive, transitive (exemple ≤ est une relation d'ordre)

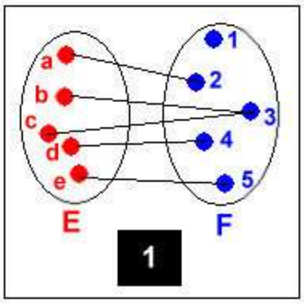
● Une **relation d'équivalence** est symétrique, réflexive, transitive (exemple a = b modulo q si la division de a et de b par q donne le même reste r)

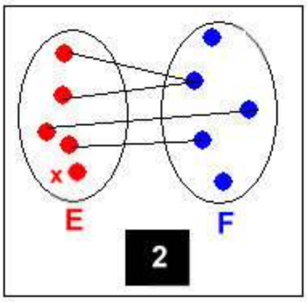
On appelle **classes d'équivalence** les sous ensembles d'éléments qui sont en relation entre eux.
(exemple tous les nombres dont le reste de la division par q est r forment une classe d'équivalence, sont équivalents entre eux)

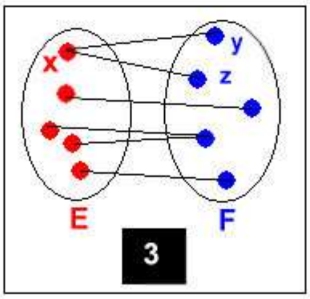
● Une **APPLICATION** f de E dans F est une relation qui met en correspondance **tout** élément de E avec un élément de F et **un seul** . f est une application de E dans F s'écrit : f : E → f
Quand x et y sont en relation par une application, on écrit y = f(x). y est l'**image** de x et x l'**antécédent** de y.

● **Rappel** E X F **ensemble produit** de E par F est l'ensemble des couples (x,y) tels que x ∈ E et y ∈ F.
E X E est noté E^2 .
Le sous ensemble de E X F formé des couples (x, f(x)) est appelé **graphe** de f .

● Quand l'ensemble d'arrivée est un ensemble de nombres **R** ou **C** ,
on dit que l'application est une **fonction numérique**.

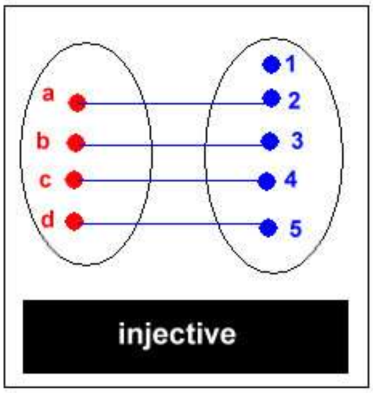


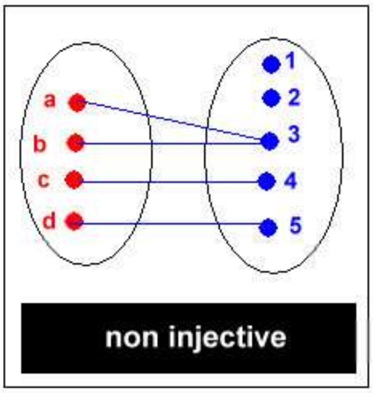




1 Application Tout élément à une image et une seule	**2** Non application x n'a pas d'image	**3** Non application x a 2 images y et z

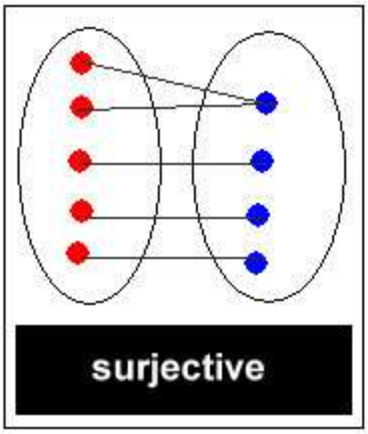
● une application de E dans F est dite **injective** si tout $(x,y) \in E \times E$: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

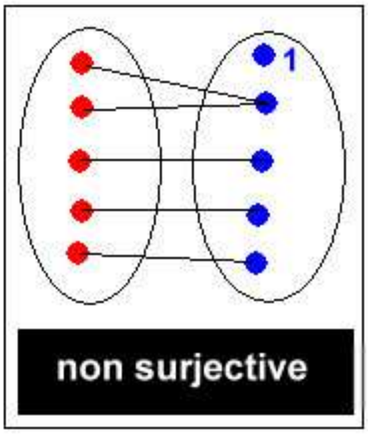




2 éléments distincts de l'ensemble de départ doivent avoir 2 images distinctes dans l'ensemble d'arrivée.
a et b ont la même image dans le 2^{e} diagramme.

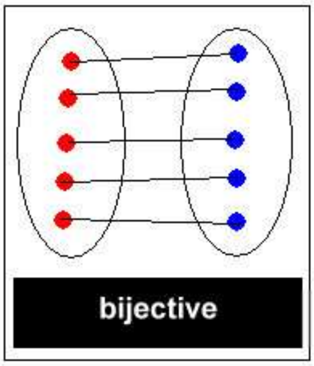
● Une application est dite **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent dans E





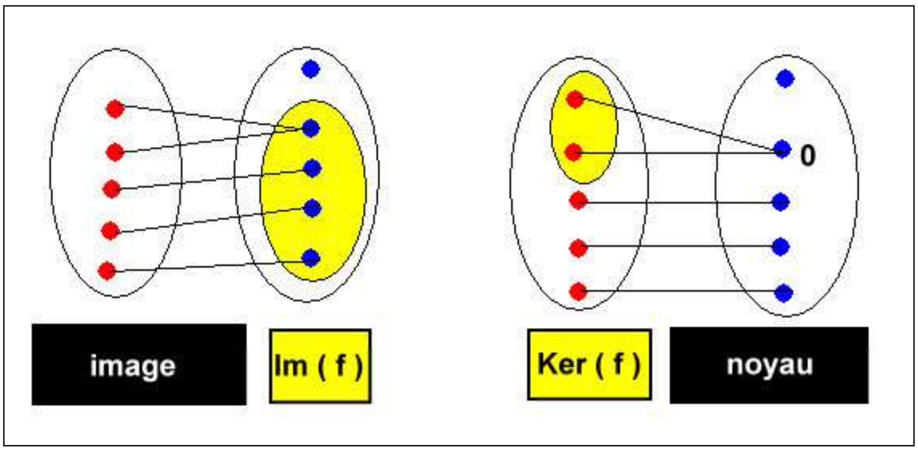
Tout élément de l'ensemble d'arrivée doit être l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ.
1 n'a pas d'antécédent.

● une application à la fois surjective et injective est dire **bijective**



Tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée.
ET
Tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un élément et d'un seul de l'ensemble de départ.
Une application n'est pas bijective si elle est non injective ou non surjective.

Image de f et noyau de f



Soit f une application numérique de E dans F

● on appelle **image de f**
(noté **Im (f)**) l'ensemble des éléments de F ayant un antécédent par f .

● on appelle **noyau de f**
(noté **Ker (f)**) l'ensemble des éléments de E ayant pour image le 0 de F .

Si f est bijective

● Quand E (ou F) est un ensemble fini E et F possèdent le même nombre d'éléments. Card (E) = card (F)

● Il existe une **application réciproque** de **f** notée **f^{-1}** .

f^{-1} est une application de F dans E définie par : tout y $\in$F : si y = f(x) alors x = f^{-1} (y).

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ = I (identité)

● l'image de E par f : f (E) = F et f^{-1} (F) = E . Im (f) = F.

● Le noyau { ensemble des x tels que f^{-} (x) = 0 } que l'on peut aussi noter **f^{-1} ({0})** se réduit à un seul élément

Composée de deux applications :

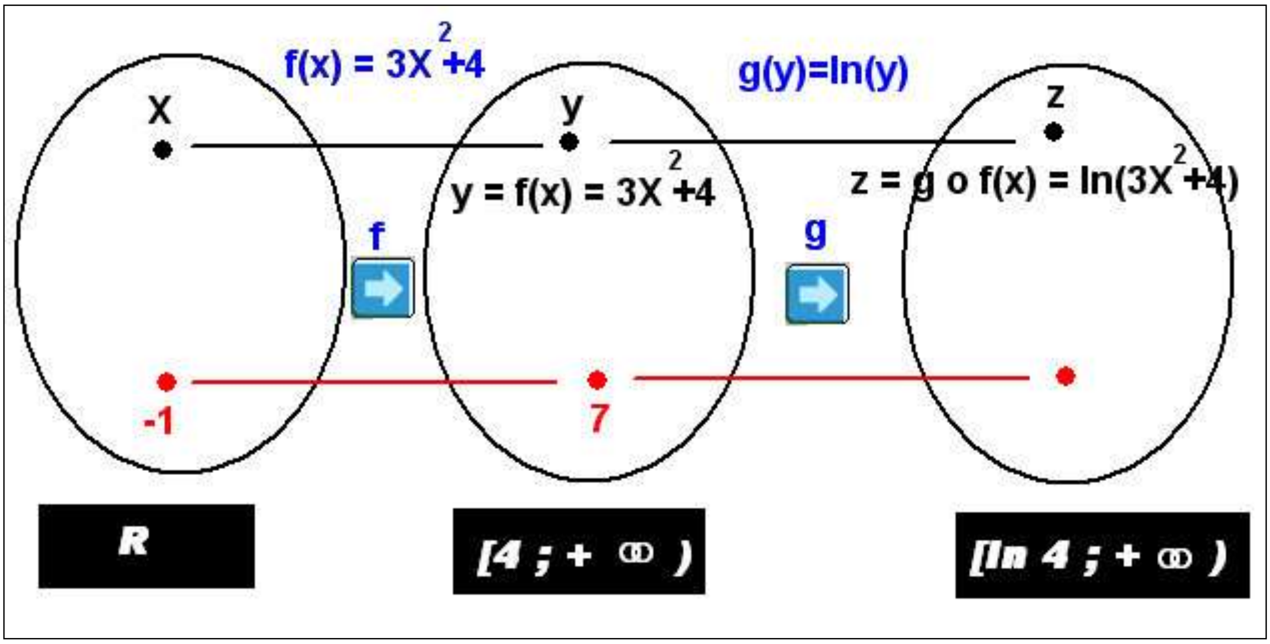
Composer deux applications c'est les appliquer l'une après l'autre dans un ordre déterminé.
Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G .
Pour composer f et g dans cet ordre , il faut que l'ensemble de départ de g soit l'ensemble d'arrivée de f .
Dés lors on définit l'application g ○ f de E dans G de la façon suivante

$g \circ f : E \rightarrow G$
$g \circ f : x \rightarrow z = g \circ f(x)$ | $g \circ f(x) = g(f(x))$. f(x) est l'antécédent de z par g .
Ce qu'on peut représenter par le schéma suivant :
E → F → G
x par **f** → f(x) par **g** → **g**○**f** (x)

Attention ! quand on écrit **g**○**f** la première application en action est celle qui est écrite à droite : **f**
En général **g**○**f** est différent de **f**○**g**

Pratiquement on appelle **application composée** une application usuelle où on a remplacé **X** par une application de **X .**
on appelle **fonction composée** une fonction usuelle où on a remplacé **X** par une fonction de **X .**

Par exemple **g(x) = ln (x)** est une fonction usuelle. (logarithme népérien de X)
h (x) = ln(3x^2 +4) est une fonction composée puisque dans **g(x)** j'ai remplacé **X** par **3x^2 +4**.
Si je pose **f(x)** = **3x^2 +4** je peux écrire **h(x) = g(3x^2 +4)** ou encore **h(x) = g(f(x))** ou encore **h(x)= g**○**f (x)** ou encore **h = g**○**f**



Dérivées d'une fonction composée ou d'une fonction réciproque:

● Dérivée d'une fonction composée

On connaît la fonction usuelle **sin (x)**
On peut considérer la fonction **sin (x^2 + 2)** comme la composée de :
f : $x \rightarrow x^2 + 2$ et **g** : $x \rightarrow \sin(x)$
g∘f (x) = g(f(x) = sin(f(x)) = **sin (x^2 + 2)**
La règle de dérivation de **g∘f (x)** par rapport à x est la suivante

La dérivée de **g∘f (x)** par rapport à x est égale au produit de la dérivée de g par rapport à f par la dérivée de f par rapport à x .

1) si on considère f comme une variable, on sait dériver g (f) **p**ar rapport à f :
g(f) = sin (f) , donc sa dérivée par rapport à f est g' (f) = sin' (f) = **cos (f)**
2) f étant une fonction simple de x, on sait dériver f par rapport à x :
f (x) = x^2 + 2 , donc sa dérivée par rapport à **x** est f '(x) = (x^2 + 2)' = **2x**
3) La dérivée de **g∘f (x)** par rapport à **x** est égale au produit de ces deux dérivées
[g∘f (x)] ' = [cos (f)] [2x]
et si on remplace f par sa valeur [**g∘f (x)]** $'_x$ **= [sin (x^2 + 2)] ' = 2x cos (x^2 + 2)**

● dérivée d'une fonction réciproque f^{-1} connaissant la dérivée de f

Quelle est la dérivée de la fonction y = arcsin (x) fonction réciproque de sin(x) ?
Si on prend x dans l'intervalle [- π/2 ; + π/2] on a **y = sin (x)** et **x = arcsin (y)** .
Si on dérive **x = arcsin (y)** par rapport à x, en utilisant la dérivation des fonctions composées on obtient :
Dérivée de x par rapport à x = dérivée de arcsin(y) par rapport à y multipliée par dérivée de y par rapport à x
Soit **1 = [arcsin(y)]'$_y$. y'$_x$** .
Il revient au même de chercher la dérivée de arcsin(y) par rapport à y ou celle de arcsin(x) par rapport à x.

Donc la dérivée cherchée est **[arcsin(y)]'$_y$** = $\frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos(x)}$ car si y = sin(x) → y' = cos(x).

Il ne me reste plus qu'à exprimer cos(x) en fonction de y et comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = y^2 + \cos^2(x) = 1$

Cos(x) = $\sqrt{1-y^2}$ donc la dérivée de arcsin(y) par rapport à y est $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, ou ce qui revient au même :

(arcsin(x))' = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Plus généralement

Pour chercher $(f^{-1})'$ connaissant f'
1) on écrit x = $f^{-1}{}_{(y)}$
2) on dérive par rapport à x 1 = [$f^{-1}(y)$] $'_{(y)}$. $y'_{(x)}$
3) on a donc [$f^{-1}(y)$] $'_{(y)}$ = $\frac{1}{f'(x)}$
4) il suffit de calculer **f '(x)** en fonction de **y** et on a [$f^{-1}(y)$] $'_{(y)}$ en fonction de **y**
5) ce qui revient au même que de connaître la dérivée de $f^{-1}(x)$ en fonction de **X (si on le souhaite on peut dire que y s'appelle x ou autrement)**

Ensembles d'applications

On peut définir l'ensemble des applications de E dans F ($\mathcal{F}$ (E,F)) ou des applications dans E ($\mathcal{F}$ (E)) .
Dans $\mathcal{F}$ (E) , la composition d'application (loi ∘) peut être considérée comme une loi de composition interne dont l'identité est l'élément neutre. .