Apprendre à calculer les probabilités au bridge.

1 Apprendre à évaluer le nombre de combinaisons de p objets choisis parmi n.

Pour apprendre à calculer les probabilités, il faut avant tout **savoir compter, ou plutôt dénombrer**.

On se pose souvent des questions du type « combien de combinaisons de 2 cartes peut -on faire avec 3 trèfles (le 2, le 3 et le 4) ? »

Au début on écrit toutes les combinaisons possibles et on les compte

♣2	♣3
♣2	♣4
♣3	♣4

Il y en a 3.

Combien de combinaisons de 2 cartes peut-on faire avec 4 carreaux (le 2, le 3, le 4 et le 5) ?

♦2	♦3
♦2	♦4
♦2	♦5
♦3	♦4
♦3	♦5
♦4	♦5

Il y en a 6.

Seulement voilà, si je vous demande « combien de combinaisons de 13 cartes je peux faire avec 52 cartes ? » si vous procédez de cette façon, vous n'êtes pas sorti de l'auberge. Il faut recourir au dénombrement qui permet de calculer le nombre de combinaisons de n objets p à p à l'aide d'une formule mathématique passablement complexe.

■ Heureusement **la calculatrice** va nous venir en aide.
À cette adresse internet on trouve une calculatrice scientifique puissante.

https://web2.0calc.com/

Pour avoir le nombre de combinaisons de 52 objets 13 à 13, autrement dit le nombre de mains possibles au bridge, il suffit de taper
ncr(52,13)=
grâce aux touches encadrées et la calculatrice nous donne le résultat :
635.013.559.600.

ncr(52,13) est le nombre de toutes les combinaisons possibles de 52 objets 13 à 13.
Donc pour avoir le nombre de combinaisons de 3 trèfles 2 à 2 on taperait
ncr(3,2)= → résultat 3.
Pour le nombre de combinaisons de 4 carreaux 2 à 2
ncr(4,2) = → résultat 6

2. Trouver le nombre des mains dont on connait la longueur de certaines couleurs.

«Combien de mains de 4 cartes contenant 2 trèfles (parmi ♣ 2,3,4) et 2 carreaux (parmi ♦ 2,3,4,5) peut-on faire ?».
Pour constituer l'ensemble de ces mains de 4 cartes, formées par croisement de 2 ensembles de combinaisons, **il faut associer chacune des combinaisons de 2 carreaux à toutes les combinaisons de 2 trèfles,**
ce qui fait en tout **ncr(4,2) X ncr(3,2)** mains de 4 cartes formées de 2 trèfles (parmi 3) et 2 carreaux (parmi 4).

Si on a besoin de « digérer » ce résultat, on peut construire un tableau comportant autant de colonnes que de combinaisons de 2 trèfles et autant de lignes que de combinaisons de 2 carreaux. Et à l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne on situe la main formée des 2 trèfles de l'entête de colonne et des 2 carreaux de l'entête de ligne.

	(♣2,3)	**(♣2,4)**	**(♣3,4)**
(♦2,3)			
(♦2,4)			
(♦2,5)		(♣2,4) (♦2,5)	
(♦3,4)			
(♦3,5)			
(♦4,5)			

Pour associer chaque combinaison de 2 trèfles à toutes les combinaisons de 2 carreaux, il suffit de remplir toutes les cases de ce tableau de 3 X 6 cases. Autrement dit avec 2 trèfles parmi 3 et 2 carreaux parmi 4 on peut faire
ncr(3,2) X ncr(4,2) = 18 mains de 2 trèfles et 2 carreaux.
Sur la calculatrice, pour trouver ce nombre on tape :

```
nCr(3, 2)*nCr(4, 2)
```

Décliné au bridge, ce type de problème pourrait donner :
Si les 26 cartes du flanc sont 7 trèfles et 19 non trèfles, sachant que la main de Nord est formée de 4 trèfles (parmi 7) et de 9 non trèfles (parmi 19) quel est le nombre des mains possibles pour Nord ? On croise chaque combinaison de 4 trèfles avec toutes les combinaisons de 9 non trèfles.
Et on trouve : **ncr(7,4) X ncr(19,9)** mains avec 4 trèfles.
(Ce nombre nous étant donné par la calculatrice)

3. Trouver le nombre de mains contenant une ou plusieurs cartes déterminées.

Les adversaires se partagent 7 trèfles (par exemple 2,3,4,5,6,7,D, 6 petits trèfles et la dame)
L'un d'eux a 4 trèfles.
Combien de combinaisons de 7 trèfles 4 à 4 peut-on donner à ce joueur ? **ncr(7,4)=35**.
Combien de ces combinaisons contiennent la dame ?
On cherche donc les combinaisons de type

♣D	x	x	x

Où les 3 x peuvent former n'importe quelle combinaison de 3 petits trèfles parmi 6.
Il y a donc **ncr(6,3) = 20** combinaisons de ce type.

Observez cette façon de procéder. On a 4 cases, une par trèfle de la main, une case est occupée par la carte connue ou recherchée (ici la ♣D) et les 3 autres par toutes les combinaisons des autres cartes de la couleur possibles (ici toutes les combinaisons de 3 petits ♣ parmi 6 possibles).
On peut donc faire **ncr(6,3) =** 20 combinaisons contenant la dame de trèfle + 3 petits trèfles parmi 6.

On a donc compté 35 combinaisons de 4 trèfles possibles dont 20 contiennent la dame. 20 sur 35 cela fait 4 / 7.
Autrement dit la main qui contient 4 trèfles contient la ♣D 4 fois sur 7.

■ **Généralisation**.

De la même façon si on savait que la main de Nord était formée de

4 ♣ (sur 7)	5 ♥ (sur 8)	4 cartes autres couleurs (sur 11)

(On sait que la main de Nord comporte 4 trèfles et 5 cœurs mais on ne connait pas son nombre de ♠ ou de ♦)

Le nombre de mains possibles pour Nord serait

ncr(7,4) X ncr(8,5) X ncr(11,4) .

Produit des nombres de combinaisons qu'on peut faire avec les cartes de chaque famille qui composent une main.

Si on cherchait le nombre de ces mains contenant ♥RD on dénombrerait les mains de type

4 trèfles	5 cœurs			4 autres
4 ♣ sur 7	♥R	♥D	3 ♥ sur 6	4 ♦+♠ sur 11

On compterait **ncr(7,4) X ncr(6,3) X ncr(11,4)** mains de ce type.

■ **Transposons ce que nous venons de voir au bridge**.

Les adversaires NS se partagent 26 cartes qui sont 7 trèfles dont la dame et 19 non trèfles.

On sait que Nord a 4 trèfles et Sud 3.

Donc toutes les mains possibles pour Nord sont de la forme

4 trèfles sur 7	9 non trèfles sur 19

D'après le deuxième type de problème on peut construire **ncr(7,4) X ncr(19,9)** mains de ce type soit en tout 3.233.230 mains.

Combien de ces mains contiennent la ♣D ?

Ce sont les mains de type

♣D	3 petits ♣ parmi 6	9 non trèfles sur 19

Il y en a **ncr(6,3) X ncr(19,9)** = 1.847.560.

4. Du dénombrement à la probabilité.

Les mains provenant de la distribution aléatoire des cartes sont bien le résultat d'une expérience aléatoire donc on peut considérer toute main où ensemble de mains inconnues comme une issue possible de cette expérience et s'interroger sur sa probabilité.
La distribution aléatoire agissant sur des bouts de cartons, elle ne favorise aucune main, et toutes devraient être produites avec la même fréquence. On dit que les mains sont équiprobables.
Dès lors que les mains sont équiprobables on définit la probabilité d'un ensemble de mains possédant une caractéristique donnée comme **le rapport du nombre de mains possibles possédant cette caractéristique au nombre total des mains possibles.**
D'où l'utilité des techniques de dénombrement.

La probabilité que Nord ait la dame de trèfle (ou plus exactement la probabilité de l'ensemble de mains situant la ♣D en Nord quand il a 4 trèfles sur 7) est donc le rapport du nombre de mains possibles situant la ♣D en Nord au nombre total de mains possibles en Nord
D'après le calcul précédent 1.847.560 / 3.233.230 = 4/7
Sur la calculatrice on peut calculer directement cette probabilité en tapant
ncr(6,3) X ncr(19,9) / (ncr(7,4) X ncr(19,9)) =
(Le diviseur doit être entre parenthèses)
Il est bien sûr plus facile d'utiliser le procédé des places vacantes et de dire que la ♣D ayant 4 places vacantes au sein des trèfles en Nord contre 3 seulement en Sud, la probabilité pour qu'elle soit en Nord est 4/7.
Rapport des places vacantes en Nord au nombre total de places vacantes. Mais il était utile de relier cette loi à la définition que nous avons donnée de la probabilité.

5. Probabilités initiales

Avant d'avoir localisé la moindre carte dans les mains adverses, vous pouvez évaluer n'importe quelle probabilité par exemple supposons que NS se partagent 3 piques, 6 cœurs, 10 carreaux et 7 trèfles.
Vous pouvez calculer la probabilité pour Nord d'avoir 4 trèfles, d'en avoir 7, d'avoir la ♠D et le ♥10, d'avoir une chicane à pique, d'avoir exactement 9 points (si vous connaissez tous les honneurs du flanc et si cette conjecture est possible), d'avoir le ♥9 + ♦ 857 + ♣R85, etc.
Vous pouvez par exemple répondre à la question suivante :
Soit l'ensemble des mains situant en Nord le ♥2 mais pas le ♥3, 0 piques, les ♦2, 3, 4
Quelle est la probabilité pour que cet ensemble de mains contienne la ♣D ?
Rappelons que NS se partagent 3 piques, 6 cœurs, 10 carreaux et 7 trèfles.

Vous avez arbitrairement localisé **en Nord** le ♥2 et ♦234, **en Sud** les 3 piques et le ♥3 (puisque Nord a 0 pique et pas le ♥3).
Il reste donc 18 cartes non localisées sur 26.
Vous reconstituez ce que vous savez de la main de Nord elle serait de type

0 piques	♥2	♦234	9 cartes inconnues sur 18

Vous pourriez constituer **ncr(18,9)=48620** mains possibles en Nord vérifiant ces hypothèses.
Parmi elles, les mains contenant la ♣D seraient du type

0 piques	♥2	♦234	♣D	8 cartes inconnues sur 17

On en compterait **ncr(17,8) soit 24310**
Et la probabilité de la ♣D en Nord serait exactement 1/2.
Cette probabilité vous l'avez calculée avant qu'aucune carte ne soit fournie c'est la probabilité pour qu'une main contenant 0 piques, le ♥2 mais pas le 3, ♦2,3,4 contienne aussi la ♣D.

6. Probabilités en cours de jeu

Si maintenant vous jouez le contrat de 4♠, NS se partageant 3 piques, 6 cœurs, 10 carreaux et 7 trèfles.
Nord entame du ♥2 Sud fournissant le ♥3.
Vous jouez 3 tours de pique, ils sont 0 en Nord, 3 en Sud.
Sur vos 3 tours de pique, Sud fournit ses 3 piques, Nord fournit les ♦2, 3, 4
Et vous vous demandez quelle est la probabilité pour que la ♣D soit en Nord.
Si vous estimez que cette probabilité n'est pas celle que vous avez calculée en début de coup au chapitre précédent, c'est-à-dire « la probabilité pour qu'une main contenant 0 piques, le ♥2 mais pas le 3, ♦2,3,4 contienne aussi la ♣D » c'est qu'il manque un boulon à votre logique.

Plus précisément pour calculer une probabilité en cours de jeu **1.** Vous identifiez les cartes localisées dans chaque main (fournies ou déduites d'un évènement). **2.** Vous comptez les cartes encore non localisées. Ce sont elles qui vont compléter de façon aléatoire les cartes connues pour former les mains possibles. **3.** Vous construisez les mains possibles pour un joueur et vous les comptez (NP). **4.** Vous faîtes de même avec les mains vérifiant l'hypothèse dont vous voulez mesurer la probabilité (NH). **5.** Et vous faites le rapport des 2 nombres : NH / NP.

7. Maintenant vous pouvez résoudre tous les problèmes élémentaires de probabilités.

Essayez de résoudre celui-là :
Les trèfles adverses sont partagés 4 en Nord, 3 en Sud.
Sachant que le ♣2 est en Nord, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi la ♣D ?

8. Quelques précisions et simplifications.

Probabilité de partage d'une couleur

En début de coup.

Si par exemple on se partage 7 cœurs et 19 non-cœurs.
Pour calculer la probabilité de 3 cœurs en Nord

3 cœurs sur 7	9 non-cœurs sur 19

Mains possibles en nord ncr(26,13)
Dont mains avec 3 cœurs ncr(7,3) X ncr (19,9)

En cours de jeu après 3 levées (13 non-cœurs non localisés)

Nord	♠A	♠R	♦5	3 cœurs sur 7	7 non-cœurs sur 13
Sud	♠2	♠7	♦D	4 cœurs sur 7	6 non cœurs sur 13

Après ♠AR, Nord rejoue carreau.
Mains possibles en Nord ncr(20,10)
Dont mains avec 3 cœurs ncr(7,3) X ncr(13,7)

Probabilité de situation d'une carte

Quand une défausse dévoile une dissymétrie

Nord	♥2	♦2	11 cartes inconnues sur 20 disponibles	
Sud	♥3	♠2	♠3	♠4	9 cartes inconnues sur 20

Après une entame à cœur, le déclarant joue atout pique à la 2e levée. Nord a une chicane à pique ce qui dévoile les ♠3, ♠4 en Sud avant qu'ils ne soient fournis. Cela crée une dissymétrie dans les cartes inconnues (11 en Nord, 9 en sud).
La probabilité de la ♣D est égale au rapport des places vacantes en Nord (11) sur le total des places vacantes (20).
Quand Nord aura fourni 2 carreaux de plus sur les piques, la ♣D sera aussi probable en Sud qu'en Nord.

Quand le partage d'une couleur est connu.

Nord	5 cœurs sur 7	8 non-cœurs sur 19
Sud	2 cœurs sur 7	11 non cœurs sur 19

■ Si on cherche la ♥D sa probabilité en Nord est égale au rapport du nombre de cœurs de Nord sur le nombre total de cœurs : 5/7.
■ Si on cherche un non-cœur, par exemple la ♣D sa probabilité en Nord est égale au rapport des non-cœurs de Nord sur le total des non-cœurs 8/19.

9. Quelques précautions

Le seul mécanisme permettant de définir une probabilité cohérente avec les enseignements mathématiques est la distribution aléatoire des cartes, au terme de laquelle on peut dénombrer les mains possibles et parmi elles les mains favorables à une hypothèse. Et ce à un stade quelconque du jeu.
Mais les bridgeurs abandonnent volontiers ce référentiel pour en utiliser un autre sans même en avoir conscience. Par exemple, superposer à la distribution un mode de fourniture des cartes qui tendrait à nous faire croire que la probabilité n'est plus un rapport entre deux nombres de mains mais une fréquence avec laquelle les adversaires auraient telle carte quand ils fourniraient de telle façon est, à mon avis une dérive incompatible avec la définition mathématique des probabilités (d'autant qu'il n'existe pas de mode de fourniture universel ou même un mode moyen de fourniture agrégeant tous les modes).

Mais il est évident que le calcul de probabilité en cours de jeu n'est pas parfait dès lors qu'il ne prend pas en compte, par exemple, les renseignements donnés par l'entame, les parités et les appels émis par les adversaires qui ne proviennent pas, en général de cartes aléatoires.

Enfin l'utilisation des distributions adverses est sujette à caution dès lors que si on connait une distribution, c'est parce qu'un adversaire au moins s'est manifesté. Et si c'est le cas cela devrait avoir un impact important sur la distribution des honneurs adverses, impact dont ne rend pas compte la probabilité brute de recherche d'un honneur.
Il est d'ailleurs passionnant d'étudier le problème suivant :
Nord est intervenu à 1♥. On cherche la ♣D. Est-il plus pertinent de la chercher en Nord parce qu'il a plus de points ou en Sud parce qu'il est plus court à cœur (et donc parce qu'il a plus de places vacantes) ?
Les probabilités pourraient à la rigueur répondre à cette question mais il faudrait connaître les limites en points d'honneurs de l'intervention, la nature exacte des honneurs que les adversaires se partagent et chaque cas serait un cas particulier requérant un calcul complexe, dépendant en outre du stade où se pose le problème.

Voilà ! Si vous m'avez lu jusques là, il est foutrement probable que vous m'ayez lu jusqu'au bout. Il est donc temps que je vous témoigne toute ma compassion.