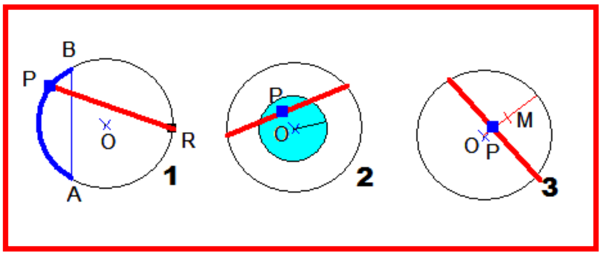
Paradoxes probabilistes: D'un univers à l'autre.

Imaginez Marcelo Mastroianni avec son savoureux accent italien, dans "Une journée particulière" :

"Ma non, monsieur, ce n'est pas le locataire du sixième qui est antifasciste. Ce sont les fascistes qui sont anti-locataire du sixième."
Moi j'ai tendance à dire :
"Ma non monsieur, ce ne sont pas les paradoxes probabilistes qui sont anti-probabilités.
Ce sont les probabilités qui sont anti – paradoxes probabilistes".

La chasse aux paradoxes probabilistes est ouverte.
Commençons par le paradoxe de Bertrand.



Soit un cercle de centre O et de rayon r.
Les côtés du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ont pour longueur $a = r\sqrt{3}$.
En 1889 Joseph Bertrand s'étonnait de ce que le calcul de la probabilité de tirer au hasard, dans ce cercle, une corde de mesure plus grande que a puisse donner 3 résultats différents, tous paraissant mathématiquement corrects.

1) On prend un point R n'importe où sur le cercle.
À partir de R, divisons le cercle en 3 arcs égaux $\widehat{RA}$, $\widehat{RB}$, $\widehat{AB}$, de mesure $\frac{2\pi r}{3}$. RA et RB sont les côtés d'un triangle équilatéral inscrit. Tirons maintenant un point P au hasard sur le cercle. Pour que la corde RP soit plus grande quea il faut que P appartienne à l'arc $\widehat{AB}$. Donc dans ce cas la probabilité cherchée est $\frac{\text{mesure de l'arc }\widehat{AB}}{2\pi r} = \frac{1}{3}$.

2) Si on prend un point P (différent de O) n'importe où à l'intérieur du disque, il existe une corde et une seule telle que P soit son milieu. Donc tirer un point P à l'intérieur du disque revient à tirer une corde au hasard. Soit le disque de centre O et de rayon $\frac{r}{2}$.
Si on tire le point P au hasard à l'intérieur de ce disque, la corde associée sera plus longue que a. Sinon elle sera plus petite.
Donc la probabilité cherchée est $\frac{\text{aire du disque }(O,\ \frac{r}{2})}{\text{aire du disque }(O,\ r)} = \frac{1}{4}$.

3) Si on prend un point P (différent de O) au hasard sur un rayon donné du cercle il existe une corde et une seule telle que P soit son milieu. Donc tirer un point P sur ce rayon revient à tirer une corde au hasard. Soit M le milieu de ce rayon. OM = $\frac{r}{2}$.
Si P est sur OM, la corde sera plus longue que a . Si P est extérieur à OM la corde sera plus petite que a.
Donc la probabilité cherchée est $\frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$.

Alors, quelle est la probabilité de tirer une corde plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ? $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{3}$? $\frac{1}{4}$?

Avant de régler son sort à ce paradoxe, faisons une petite incursion dans l'axiomatique des probabilités dont Kolmogorov a édicté les règles en 1933.

L'axiomatique.

Que Kolmogorov ait estimé nécessaire de mettre de l'ordre et de définir ce qu'on pouvait appeler "probabilité" au sens mathématique par opposition au sens intuitif que nous avons de ce concept n'était pas inutile si on en juge par les abus et sacrilèges de toutes sortes qu'on commet encore aujourd'hui au nom de cette science.

Kolmogorov nous explique qu'au sens mathématique, toute expérience aléatoire a pour cadre un ensemble qu'on appelle "Univers" et qu'on note Ω. Cet ensemble est formé de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire.

L'univers peut être découpé en sous ensembles d'une ou plusieurs issues. Une famille des ces sous - ensembles constitue une tribu sur l'univers si elle possède les propriétés suivantes:
1) l'Univers Ω et l'ensemble vide ∅ font partie de cette famille.
2) le complémentaire de tout sous – ensemble de cette famille appartient à la famille.
3) toute réunion d'un nombre fini de sous ensemble de cette famille appartient à cette famille.

Si l'on sait mesurer (au sens mathématique) tous ces sous ensembles, on peut définir une probabilité sur la tribu.
La probabilité d'un sous ensemble A que l'on note P(A) est égale au rapport $\frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de }\Omega}$.
Cette définition donne à la probabilité le statut d'une mesure comprise entre 0 et 1.
Notons que l'on parle de la "probabilité d'un ensemble" et que cet ensemble porte le nom d'"évènement".
Un évènement est donc un ensemble d'issues.
De la définition de la probabilité en tant que mesure on tire plusieurs propriétés dont les plus triviales sont :
Si A est un évènement on a $P(A) \in [0 ; 1]$,
$P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$,
Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
Si A et B sont 2 sous – ensembles disjoints de la tribu on a P(A U B) = P(A) + P(B).
Si A et B (2 sous – ensembles de la tribu) ont une intersection on a P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A∩B).

En règle générale, les issues sont dotées de caractères qualitatifs ou quantitatifs déclinés en plusieurs modalités.
Par exemple le caractère couleur est décliné en "bleu", "blanc", "rouge", le caractère forme est décliné en "rond", "carré", triangle", le caractère nombre inscrit sur un dé est décliné en 6 modalités {1;2;3;4;5;6}. Etc …
Il est fréquent qu'à chaque modalité corresponde un sous ensemble de la tribu (un évènement) et on peut définir des modalités composites telles que "triangle ET bleu", "multiple de 3 OU pair", "NON carré" en les associant avec des locutions logiques. À chaque locution logique correspond une opération sur les évènements correspondants.
Au ET correspond l'intersection, au OU correspond la réunion, au NON correspond le complémentaire dans Ω.

Quand l'univers Ω est fini, dénombrable et formé d'éléments équiprobables devant l'expérience aléatoire, l'ensemble des parties de Ω (Ω et ensemble vide inclus) constitue une tribu sur Ω. Et le nombre d'éléments de chaque partie en constitue une mesure au sens mathématique. C'est un cas qu'on rencontre fréquemment et dans ce cas, la probabilité de l'évènement A est
$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}$.
Quand l'univers est infini mais borné et mesurable comme un cercle, un disque, un segment de droite, la probabilité de l'un de ses points est nulle mais il suffit de définir une tribu à partir de sous-ensembles mesurables pour qu'on puisse évaluer leur probabilité par comparaison de leur mesure avec celle de l'univers.
Par exemple si Ω est un segment de droite, les segments de droite et réunions de segments de droite inclus dans Ω sont mesurables et constituent une tribu.
Sur un cercle univers on prendra les arcs de cercles et réunions d'arcs de cercles dont on sait évaluer la longueur.
Ou bien la tribu des disques et couronnes circulaires (dont on sait évaluer la surface) inclus dans un disque univers.
Dans tous ces cas $P(A) = \frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de }\Omega}$. (mesure au sens physique ou mathématique).

L'expérience aléatoire prend souvent le nom de tirage. Il y a les tirages simples et les tirages multiples. Les tirages multiples simultanés et les tirages multiples successifs, les tirages avec remise et les tirages sans remise…
Dans le cas d'une épreuve formée de tirages multiples, l'issue d'une épreuve est constituée des résultats des tirages qui la constituent et ceux-ci peuvent être regroupés sous la forme d'une combinaison, d'un arrangement ou d'un n-uplet selon que les tirages ont lieu dans un même ensemble ou dans plusieurs ensembles (différents ou non), selon que les permutations de plusieurs tirages constituent une même issue ou non. En principe, le protocole de tirage et la description des évènements dont on veut calculer la probabilité suffisent à définir ce que l'on appelle "issue d'une épreuve" et la façon dont ces issues doivent être regroupées pour former les évènements.
Ensuite le calcul de probabilité se résout souvent à un problème de dénombrement ou de mesure.

Pour pouvoir calculer une probabilité au sens mathématique, il faut théoriquement réunir tous ces éléments, définir l'expérience aléatoire, l'univers des possibles, le procédé de mesure, sans quoi le terme de probabilité n'a pas grand sens.
Souvent les paradoxes tirent leur substance d'un manque de rigueur au niveau de la définition des pré – requis imposés par l'axiomatique.
L'univers, notamment doit être formé de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire et seulement de celles – ci.
Notons d'ores et déjà que la notion d'instant et le concept de possible sont liés. On peut définir l'instant comme un état exhaustif de l'univers au temps T. Si un évènement E constitutif de l'univers est possible à l'instant t1 et avéré à l'instant t2, on ne peut plus, à l'instant t2 prétendre calculer une probabilité à partir d'un univers où E serait encore possible.

Le paradoxe c'est Bertrand.

Le problème de Bertrand ne va pas résister longtemps à l'approche axiomatique.
Dans ce problème on ne tire pas des cordes au hasard mais des points.
L'univers est, toujours un univers de points. L'univers a toujours un lien avec un cercle (O, r) mais selon le cas,..

- On prend un point P sur le cercle et on mesure la probabilité pour qu'une corde PM soit plus grande que a = $r\sqrt{3}$.
  Dans ce cas, l'univers est soit le cercle, soit l'ensemble des cordes d'extrémité P.
- On prend un point P sur le cercle et on mesure la probabilité pour qu'une corde perpendiculaire à OP soit plus grande que a.
  Dans ce cas l'univers est soit le rayon OP soit l'ensemble des cordes perpendiculaires à OP.
- On prend un point P dans le disque (O,r), chaque point du disque est le centre d'une corde unique et on mesure la probabilité pour que cette corde soit plus grande que a.
  Dans ce cas, l'univers est soit le disque (O,r), soit l'ensemble des cordes du cercle (O,r).

Il est évident que ces univers de cordes n'ont pas grand-chose à voir les uns avec les autres alors pourquoi s'étonner que la probabilité de tirer une corde plus grande que a soit différente dans chacun d'entre eux ?
En fait le paradoxe de Bertrand n'en est pas un mais que toute une littérature se prétendant scientifique l'ait longtemps considéré comme tel nous permet de mettre le doigt sur un défaut fréquent. On ne peut pas parler de probabilité sans avoir soigneusement défini l'univers comme l'ensemble des possibles et vérifié que cet ensemble et les évènements qui le composent sont mesurables.

Le problème des 3 portes

Ce problème est beaucoup plus subtil.
Nous nous trouvons devant 3 portes identiques.
Derrière l'une d'elles on trouve un trésor, derrière les 2 autres on ne trouve rien.
Le meneur de jeu, qui sait où se trouve le trésor, nous demande de choisir une porte puis en ouvre une autre sur une pièce vide et nous demande si au final pour localiser la porte derrière laquelle se trouve le trésor, nous voulons conserver notre choix initial où choisir la 3e porte, celle qu'il n'a pas ouverte.
Ce problème, initialement posé par un jeu télévisé américain (paradoxe de Monty Hall), a donné lieu à de grandes controverses pour savoir si la probabilité d'un changement opportun était $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$.
Nous allons passer en revues différents types de raisonnements mis en avant pour résoudre ce problème et les examiner selon l'approche axiomatique.

❶ Dans le premier cas, l'univers est une projection de l'esprit, c'est l'ensemble de toutes les combinaisons possibles pour les portes dotées de 2 caractères: un numéro 1,2,3 pour les différencier et un attribut bonne (B) ou mauvaise (M) selon qu'elles cachent ou non le trésor. Quand on sait que la porte 2 est mauvaise (2M) notre univers contient 2 issues possibles {**(1B,2M,3M)** et **(1M,2M,3B)**} et comme elles étaient équiprobables avant que commence l'épreuve, il n'y a aucune raison que ce ne soit plus le cas au moment du choix. Si on tirait parmi des boules rouges ou noires et qu'on en enlève une avant de nous demander de procéder au tirage, les boules, comme nos issues, demeureraient équiprobables. Et dans notre cas on trouve donc une équivalence entre changer de porte ou garder la nôtre. Probabilité 50%.

❷ Certains raisonnent en passant en revue tous les cas possibles et en s'interrogeant sur l'issue du changement qui peut être bon ou mauvais. En supposant qu'on ait choisi la porte 1, toutes les possibilités sont
(1B,2M,3M) → Changement mauvais
(1M,2B,3M) → Changement bon
(1M,2M,3B) → Changement bon
Et, disent-ils, y a donc 2 possibilités pour que le changement soit bon et 1 seule pour que le changement soit mauvais.
La probabilité de "changement bon" est donc $\frac{2}{3}$.

❸ Dans le 3e cas, on fait appel à la populaire loi de Bayes qui est formidable pour démontrer que la probabilité reste constante même si la complexion de l'univers change.
Supposons que la porte 1 soit le choix initial (fréquence 1/3), et notons "o" la modalité "ouverte". Le meneur de jeu ouvre obligatoirement la porte 2 ou 3 si 1M (fréquence 1) et aléatoirement la porte 2 ou la porte 3 si 1B (fréquence ½).
Dans l'ensemble des épreuves où la porte 1 a été choisie, on peut avoir, en fonction de la configuration des 3 portes :
(**1B**,2M,3M) et **2o** (fréquence $\frac{1}{3}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$)
(1B,2M,3M) et 3o (fréquence $\frac{1}{3}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$)
(1M,2B,3M) et 3o (fréquence $\frac{1}{3}\text{x}1 = \frac{2}{6}$)
(**1M**,2M,3B) et **2o** (fréquence $\frac{1}{3}\text{x}1 = \frac{2}{6}$)
On en déduit qu'il y a 2 fois plus d'épreuves $(\text{fréquence } \frac{2}{6} \text{ contre fréquence } \frac{1}{6})$ où la porte 2 ayant été ouverte (2o) le trésor se situait derrière la porte 3. On a donc intérêt, sur un grand nombre d'épreuves du type de la nôtre à changer de porte.
Chose promise, chose due, la loi de Bayes a fait son travail et malgré qu'on ait ouvert une porte et dévoilé qu'elle ne cachait pas le trésor, les probabilités sont les mêmes qu'avant que le meneur de jeu n'ouvre la porte : elles sont favorables au changement de porte dans le rapport de 2 contre 1.

Mais remarquons que les solutions 2 et 3 sont entachées de flagrantes irrégularités devant l'axiomatique des probabilités :
■ La première intègre à son univers une issue **(1M,2B,3M) → Changement bon** qui n'a pas lieu d'y être au moment où se pose le problème. Quand on sait que la porte 2 est mauvaise on ne peut pas considérer comme possible une issue où elle serait bonne.
■ La seconde est entachée de la même irrégularité. Comment expliquer qu'on trouve pour porte 3 ouverte une probabilité non nulle alors que c'est un évènement impossible au moment où nous avons à résoudre le problème ? Comment expliquer que si on ajoute les probabilités des seules issues possibles (**1B**,2M,3M) et **2o** et (**1M**,2M,3B) et **2o** on ne trouve pas 1 alors que personne ne peut nier qu'elles constituent notre univers au moment où se pose le problème ?
Et enfin si le meneur de jeu a décidé de toujours ouvrir la porte 2 quand elle est libre la fréquence de (**1B**,2M,3M) et **2o** devient 1/3 et plus 1/6 ce qui fait que garder la porte 1 ou changer pour la porte 3 offrent les mêmes chances de gain. Mais comme vous ne savez pas comment le meneur de jeu procède vos probabilités ne veulent rien dire.

Mais en examinant le protocole du paradoxe de Monty Hall, avant de calculer quoi que ce soit, on devrait se poser une question fondamentale :
Une expérience où intervient un agent extérieur qui a le droit de manipuler les issues en ouvrant une porte derrière laquelle il sait par avance ne pas dévoiler le trésor est-elle une expérience aléatoire ?
Une expérience aléatoire est une expérience où seul le hasard intervient et là ce n'est pas le cas.
Et si ce n'est pas le cas c'est que les probabilités sont impropres à traiter le problème intégrant l'interaction d'un meneur de jeu n'agissant pas de manière aléatoire On pourrait parler de la fréquence avec laquelle il faudrait changer de porte si on jouait souvent à ce jeu mais on ne voit pas à quoi elle pourrait nous être utile dès lors qu'on n'y joue qu'une fois. Et de toute façon, si c'était une probabilité, de serait une probabilité sur un univers projectif avant qu'aucune porte ne soit ouverte. Pas après.

Épreuve aléatoire ?

Pour illustrer la pertinence de leur point de vue, certains comparent le jeu de Monty Hall à une épreuve où l'on demanderait au joueur de choisir une carte au hasard parmi 52.
Puis on retournerait 50 cartes qui ne seraient pas l'as de pique parmi les 51 cartes restantes et on demanderait au candidat si pour trouver l'as de pique il préfère conserver son choix initial ou changer pour l'unique carte qui n'a pas été retournée parmi les 51 cartes qu'il n'a pas choisies.

> Les probabilités sont dans ce cas de 1/52 si vous conservez votre choix initial et de 51/52 (un peu plus de 98 %) si vous modifiez votre choix, parce que vous aurez retourné en tout 51 cartes sur 52.

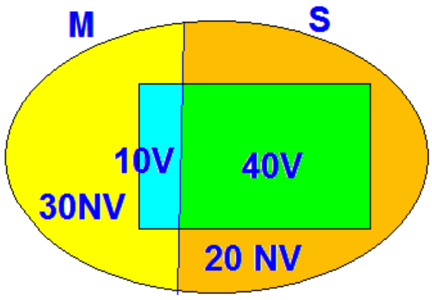
Évidemment le candidat effrayé par la maigreur de ses chances initiales (une sur 52) s'empresse de changer de carte. Et ceux qui utilisent cette argumentation prétendent que le changement est bon à 51 contre 1 comme l'affirme un article du monde paru sur le sujet en 2013 (encadré ci - contre).
La loi de Bayes (employée à tort et à travers en utilisant des issues impossibles) a encore fait son travail et malgré qu'on connaisse 50 cartes qui ne peuvent pas être la nôtre, la probabilité que la nôtre soit l'as de pique est encore ce qu'elle était au début : 1 / 52.

Notre instinct nous souffle qu'il vaut mieux changer de carte parce que notre tendance casinomaniaque prend le dessus, et qu'instinctivement, on se dit que si l'on jouait de nombreuses fois à ce jeu, il faudrait miser sur l'autre carte pour gagner le plus souvent.
Mais d'un autre côté, il devrait nous faire considérer avec méfiance ce « une chance sur 52 » car une fois que nous avons éliminé 50 hypothèses que nous pouvions faire dans l'univers initial sur la carte que nous avons tirée (50 issues possibles), la probabilité qu'elle soit l'une des deux cartes restantes ne peut plus être ce qu'elle était au début c'est à dire 1/52.
Alors ?
Alors **LES PROBABILITES S'APPLIQUENT AUX EPREUVES ALEATOIRES ET A ELLES SEULES.**
Et peut être faut – il se pencher sur la nature de l'expérience à laquelle nous nous livrons.

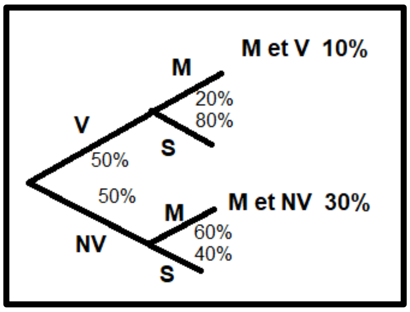
Définition:
Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend uniquement du hasard.
Si nous considérons que notre expérience est décomposée en 2 actions 1) le choix de la première carte, 2) le choix de la seule carte qu'on ne retournera pas. Il est incontestable que la première action est aléatoire mais en ce qui concerne la seconde ….
Quand nous n'avons pas tiré l'as de pique, et que le gugusse qui organise l'expérience le cherche avec insistance parmi les 51 cartes restantes pour en faire la seconde carte cachée, diriez - vous que c'est le hasard qui vous a mis en présence de cette seconde carte cachée ? Diriez-vous que cette carte est le produit d'un choix aléatoire ? Diriez-vous que vous participez à une expérience aléatoire ? Ne serait-ce pas comme si notre croupier était capable de faire atterrir sa boule à tous les coups dans un cinquante et unième donné du cylindre ?
Et c'est la même chose pour le jeu de Monty Hall. Peut-on considérer qu'une expérience où le meneur de jeu sait quelle porte li doit ouvrir quand le joueur n'a pas choisi la bonne porte est une expérience aléatoire ? Diriez-vous que la situation dans laquelle se trouve le joueur est soumise aux seules lois du hasard ? Bien sûr que non. Alors …
Qu'ont à faire les probabilités dans une expérience qui n'est pas aléatoire ?
Supposez qu'un sac contienne 2 boules noires et une blanche on en attrape une mais on la laisse dans le sac. Le meneur de jeu tire une autre boule **au hasard** (il peut tirer une blanche) il tire noire on a P(B,N) = P(N,N) = 1/3 et donc P(B) = ½.
Le tirage étant aléatoire, l'équiprobabilité des boules persiste. Quand il ne reste que 2 boules leur probabilité est la même.

Prenons un autre exemple où l'on utilise la loi de Bayes.

Un exemple fondamentalement différent.



Supposons une population de 100 personnes où 40 sont malades (M) et 60 saines (S), 50 vaccinées (V), 50 non vaccinées (NV) et où la probabilité d'être malade quand on est vacciné (M quand V) est 20%.
L'épreuve : on tire une personne, elle est malade.
Quelle est la probabilité P pour qu'elle soit vaccinée ?
L'univers est la population.
L'énoncé suffit à déterminer la fréquence, autrement dit la probabilité des différents sou- ensembles dans l'univers :
M et NV → 30% , M et V → 10% , S et NV → 20% , S et V → 40%
On compare M et V (10%) et M et NV (30%) et on en déduit que
$P = \frac{10}{30+10} = \frac{1}{4} = 25\%$.



Si on parle de probabilité des causes c'est que le problème se pose souvent à travers un tel arbre où l'on connait les probabilités d'être malade ou sain quand on est vacciné ou malade ou sain quand on est non vacciné.
On considère que le vaccin (la cause) a une influence sur l'état de santé et connaissant la probabilité de toutes les combinaisons des deux modalités, on détermine la probabilité d'être vacciné quand on est malade comme le rapport $\frac{P(M\ et\ V)}{P(M\ et\ V) + P(M\ et\ NV)} = \frac{10}{10+30} = 25\%$
Ici l'arbre ne donne que des probabilités mais il serait équivalent de se situer dans une population de 100 personnes où 10 seraient malades et vaccinées et 30 malades et non vaccinées. P serait alors la proportion des vaccinés parmi les malades.

Quelle est la différence entre cet exemple et celui des 3 portes ?
Ici les fréquences ne sont plus celles avec lesquelles une conjonction de faits se produit dans un grand nombre d'épreuves.
Les fréquences sont la proportion d'une classe d'individus par rapport à l'effectif (la population) d'un ensemble concret.
Aussi dans notre exemple, tous les évènements composant l'univers, (V, NV, M quand V, S quand V, M et V, M et NV, etc…) sont simultanément possibles et mesurables. Autrement dit, on peut tirer au même instant un élément appartenant à un évènement et un élément appartenant à son complémentaire. L'univers est compatible avec l'instant.
.
Alors que dans l'exemple des portes pour trouver un univers de probabilité 1, il faut faire appel à des faits comme porte 3 ouverte ou porte 2 ouverte qui ne sont pas possibles simultanément dans une expérience. Dans cet univers quand la porte 2 est ouverte allez tirer un évènement comme (1B,2M,3M) et 3o. Vous risquez de vous enrhumer si vous laissez toutes les portes ouvertes. Un univers d'épreuves (dans 2 épreuves sur 3 où la porte 2 sera ouverte le joueur aura intérêt à changer de porte) ne peut être que projectif et s'il quantifie les évènements en fonction de ce que sera le résultat de l'expérience il calcule une probabilité avant que l'expérience ne commence (c'est-à-dire quand il ne fait aucun doute que le joueur a 1 chance sur 3 d'être tombé sur la bonne porte), en aucun cas quand on est enfermé dans une épreuve (on a choisi la porte 1 et la porte 2 a été ouverte) et que l'univers n'est plus (ne peut plus être) un univers d'épreuves. Alors que dans l'exemple malades / vaccinés, l'univers est le même avant et après le tirage (autrement dit l'épreuve).

Dans l'exemple académique des malades, pour construire l'univers, on n'a pas besoin de recourir à des épreuves où les choses ne se seraient pas passées comme dans la nôtre. On n'a pas besoin d'imaginer qu'on aurait pu ouvrir une porte au lieu d'une autre ou tirer un malade au lieu d'un autre.
Supposons que je peigne en jaune une personne de M+V et une personne de M+NV. Si je raisonnais de la même façon dans l'exemple malades / vaccinés que dans l'exemple Monty Hall et que j'invente un univers d'épreuves, je dirais que, quand on renouvelle souvent l'opération de tirage, la probabilité pour que la personne tirée provienne de M+NV est 3 fois plus importante que la probabilité qu'elle provienne de M+V mais comme il y a 3 fois plus de personnes dans M+NV que dans M+V, si la personne tirée est peinte en jaune, la probabilité de tirer jaune dans M+V est trois fois plus importante que la probabilité de tirer jaune dans M+NV et au total la probabilité que jaune provienne de M+NV est la même que la probabilité que jaune provienne de M+V.
Ce qui fait que sur de nombreuses épreuves où je tirerai jaune et qu'il sera malade il sera vacciné dans 50% des cas. Comme dans l'ensemble de la population. Au lieu de 25% selon Bayes.
Et Bayes ne serait pas très content de l'utilisation que vous avez faite de sa loi.
Pourtant c'est le raisonnement que les bridgeurs utilisent dans le moindre choix : "certes DV secs sont plus fréquents que V sec mais avec DV on ne fournit le V qu'une fois sur 2, tandis qu'avec V sec on le fournit à tous les coups".
Ici les malades non vaccinés sont 3 fois plus nombreux que les malades vaccinés mais l'ensemble des malades non vaccinés fournit jaune une fois sur 30 tandis que les malades vaccinés fournissent jaune une fois sur 10. Peignez le valet en jaune et le parallèle est tout à fait justifié.
En conclusion : Si l'on fait exception du caractère rédhibitoire de l'utilisation de probabilités dans des expériences non aléatoires, il n'en reste pas moins que l'utilisation de la loi de Bayes dans un univers d'épreuves peut être suspectée de non pertinence dés lors qu'elle peut donner des résultats contradictoires avec les probabilités héritées de la configuration de l'univers sur lequel elle s'applique, des probabilités qui, elles, ne sont pas contestables.

Les probabilités psychologiques d'Émile Borel

Un grand mathématicien Français, Émile Borel, a publié en 1949 un livre intitulé "Théorie mathématique du bridge à la portée de tous" (éditions Jacques Gabay) dans lequel il s'intéressait à ce noble jeu qui repose, pour l'essentiel, sur la maîtrise des probabilités.

Au bridge les joueurs s'appellent Sud, Ouest, Nord, Est dans l'ordre où ils sont disposés autour de la table.
Les joueurs sont associés en paires. La paire Nord-Sud est opposée à la paire Est-Ouest.
Au début d'une **donne**, chaque joueur reçoit aléatoirement **13 cartes** provenant d'un jeu qui en comporte **52** et qui est formé de 4 couleurs de 13 cartes (♠,♥,♦,♣).
Dans l'ordre de force décroissante les 13 cartes d'une couleur sont A,R,D,V,10,9,8,7,6,5,4,3,2. (As, roi, dame, valet, …)
On appelle **main** les cartes que chaque joueur a en main à un moment quelconque du jeu.

Au début du livre, Borel évalue un tas de probabilités utiles aux joueurs et à ce stade, il se situe dans l'univers des mains possibles ce qui signifie que pour calculer la probabilité d'un évènement, il compte les mains de l'évènement, (par exemple les mains comportant 6 trèfles et 7 non-trèfles, ou les mains contenant roi et dame de cœur), ensuite il compte toutes les mains possibles, et définit la probabilité de l'évènement comme le rapport de ces deux nombres.
L'univers des mains possibles est évidemment projectif : on imagine toutes les façons dont la distribution aléatoire qui précède la donne a pu faire son œuvre et on compte les mains possibles chez un joueur en supposant leur équiprobabilité. Mais c'est un univers passif en ce sens qu'il n'est influencé par aucun évènement postérieur à la distribution.
Simplement quand un joueur a localisé par exemple 30 cartes sur 52 et qu'il reste 10 cartes inconnues dans la main d'un joueur en l'absence de toute autre information, les mains possibles pour ce joueur sont toutes les combinaisons des 22 cartes non localisées 10 à 10.

Pour donner un exemple, quand le jeu de la carte débute, Nord étale ses 13 cartes au su et au vu de tout le monde, et c'est Sud son partenaire qui va les jouer. Sud a donc localisé 26 cartes (les 13 de Nord et les 13 de sa main) et les adversaires se partagent 26 cartes non localisées.
Supposons que Nord et Sud aient 9 piques sur 13 à eux deux.
Est et Ouest qui ont chacun 13 cartes en main à ce stade se partagent 4 piques ainsi que 22 non-piques.
Borel compte les mains possibles de 13 cartes en Est 10.400.600. Puis parmi ces mains il compte celles qui contiennent exactement 2 piques parmi 4 et 11 non – piques parmi 22: 4.232.492 et il en déduit que la probabilité du partage 2-2 des piques entre Est et Ouest est environ 40,7%.

C'est un peu plus loin, dans son ouvrage que Borel va s'enfoncer dans le marais fangeux de la probabilité psychologique.
Le problème étudié par Borel est le suivant :
On dispose de 6 cartes : RV d'une couleur (♥) et 2, 3, 4, 5 d'une autre couleur (♠).
On les distribue de façon aléatoire : 3 à Est – 3 à Ouest
La probabilité de trouver RV rassemblés dans la main d'Est est **20%**. (4 mains possibles sur 20)

RV2	234	345	45V	25R
RV3	235	34R	245	25V
RV4	23R	34V	35V	24R
RV5	23V	45R	35R	24V

On demande à Est et Ouest de montrer chacun un petit pique de sa main (Ce qui est toujours possible).
Les probabilités sont – elles modifiées ?
Borel examine successivement 3 hypothèses :
1 Est et Ouest choisissent aléatoirement le pique qu'ils vont montrer parmi ceux qu'ils ont en main
2 Est et Ouest montrent toujours le plus petit pique qu'ils possèdent
3 Est et Ouest montrent toujours leur plus petit pique, sauf si leurs deux plus petits piques se suivent : dans ce cas ils choisissent indifféremment l'une ou l'autre.
En ce qui nous concerne, nous allons nous borner à étudier le cas 1.

Cas 1
Est a montré le ♠2 et Ouest le ♠3. Ces cartes ont été montrées (jouées) aléatoirement parmi les piques de chaque main.
Du point de vue des mains possibles Est ne pouvait avoir en début de coup que
245 24V 24R 25V 25R 2**RV**
Donc la probabilité pour qu'il ait RV est passée de **20%** à 1/6 soit **16,7%.**

Maintenant, laissons Borel nous expliquer pourquoi cette probabilité n'est pas la bonne :
« La faute de raisonnement (de l'évaluation précédente) provient de ce qu'on tient seulement compte de la probabilité d'entrée en jeu de la cause : Est recevra RV2, 5 fois sur 100. On oublie de tenir compte de la probabilité que, la cause étant entrée en jeu, c'est-à-dire Est ayant reçu RV2, Est et Ouest jouent tous deux comme ils l'ont fait. Voici maintenant le raisonnement correct qui consiste à appliquer la formule de Bayes…»
Et Borel nous explique que si Est a RV2 la probabilité pour qu'il joue le 2 est 1, tandis que la probabilité pour qu'Ouest joue le 3 est 1/3 puisqu'il a 3 petites cartes.

Si on passe en revue de la même façon les 6 mains possibles pour Est et qu'on s'intéresse à toutes les possibilités de fournitures, on verra que sur les cas où le 2 et le 3 sont fournis, la fréquence de RV en Est sera 1/5 soit **20%** c'est-à-dire exactement ce qu'elle était au début du coup.

Détail du calcul combinant probabilité de présence et probabilité de fourniture du 2 et du 3:

EST	OUEST	P(présence)	P(fourniture 2 et 3)	P(présence et fourniture)	TOTAL
245	3RV	1/6	1/3	1/18	4/18
24V	35R	1/6	1/4	1/24	
24R	35V	1/6	1/4	1/24	
25V	34R	1/6	1/4	1/24	
25R	34V	1/6	1/4	1/24	
2RV	345	1/6	1/3	1/18	1/18

Au total: probabilité d'avoir l'une des mains possibles et de fournir le 2 en Est et le 3 en Ouest = 5/18
Probabilité d'avoir RV en Est quand le 2 et le 3 sont fournis par les mains de l'exemple = 1/18 divisé par 5/18 = 1 / 5 = **20%**
Bien sûr pour que ces chiffres soient valables, il faut que d'autres cartes soient fournies avec les mains possibles, par exemple avec 245 pour 3RV, le 5 et le 3 peuvent être fournis. Mais ces cas sont négligés. Nous ne nous intéressons qu'aux cas où comme dans notre problème, le 2 et le 3 ont été fournis.

L'étude détaillée du cas 1 montre bien que Borel fait fournir les cartes de toutes les façons possibles **à partir des seules combinaisons qui sont compatibles avec notre donne.** Dans l'exemple de Borel on s'interroge sur la probabilité après qu'Est ait fourni le 2 et Ouest le 3. Toutes les combinaisons à partir desquelles on invite les 2 joueurs à fournir des petits piques au hasard situent bien ces 2 cartes là où on les a vues.
Cela est conforme à une autre déclaration de Borel:
« Les déclarations, d'abord, l'entame et le jeu de la carte ensuite, nous fourniront des renseignements de plus en plus précis **desquels nous tiendront compte en <u>éliminant les hypothèses incompatibles avec ce que nous avons appris</u>** ; mais qui avaient dû être envisagées comme possibles au début, dans les calculs faits avant la donne. Nous aurons aussi à tenir compte de **la psychologie** des joueurs, c'est à dire de la probabilité des causes. Nous nous demanderons, **<u>en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes</u>**, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué. Et l'application de la formule de Bayes nous permettra enfin de remonter à la véritable probabilité à posteriori : celle que l'effet observé soit bien du à la cause. »
Borel appelle ces probabilités des "probabilités psychologiques". Comme on le voit, dans cet exemple, il a quitté l'univers passif des mains possibles pour un univers actif formé d'épreuves dans lesquelles la machine touche chaque combinaison de cartes possible avec la même fréquence ($\frac{1}{6}$) et fournit les petites cartes à pique de façon aléatoire.
Il n'est pas sûr que Borel soit conscient de ce changement. N'étant pas un grand fan de l'axiomatique (qu'il tient pour inutile comme il le dit dans certains de ses écrits) Borel n'est pas trop préoccupé par la coexistence d'univers parallèles dans ses démonstrations. Il dit les choses comme il les ressent avec l'autorité de l'ancien ministre de la marine devenu maître es probabilités en l'université de Paris.

En tous cas, il est paradoxal que l'on puisse calculer 2 probabilités différentes selon qu'on se situe dans un univers de mains possibles ou dans un univers de donnes où l'on joue les cartes à partir de ces mêmes mains.
En fait ce problème est de même nature que celui des 3 portes. Dans un problème le meneur de jeu ouvre une porte aléatoirement quand il en a la possibilité, dans l'autre on demande aux joueurs de fournir aléatoirement un petit pique quand ils en ont la possibilité. Dans les 2 cas la fréquence de ces actes conditionne le calcul de la probabilité et il faut se référer à un univers d'épreuves étudié selon l'optique de Bayes pour justifier les nombres trouvés.
Cela dit, si les deux problèmes sont de même nature, celui de Borel, on va le voir, nous donne plus d'occasions de démontrer les incohérences de l'analyse sur laquelle il est basé.

Bizarre? Vous avez dit bizarre?

Pour commencer observons un fait bizarre : Avec les mains à partir desquelles il fait fournir Est et Ouest, Borel évalue à $\frac{1}{6}$ la probabilité de présence de RV dans la main d'Est.
Cela signifie que dans $\frac{1}{6}$ des donnes avec lesquelles il fait fournir des petites cartes, RV se trouvent en Est.

<u>Pourquoi ne considère – t – il pas, alors, que $\frac{1}{6}$ est la probabilité que nous cherchons?</u>
Pourquoi lui superpose – t – il une fréquence de fourniture qui nous projette dans un univers de donnes ?

Quand Borel estime à 50% la probabilité par exemple de la ♣D en Est est-ce que ça ne signifie pas que si l'on fait défiler toutes les mains possibles cette carte sera en Est dans 50% des cas ?
Alors pourquoi quand RV sont EST dans une donne sur six on ne fait pas la même chose ?
On nous fait un gros caprice là !

Le tour de passe – passe.

En fait, l'univers tel que nous le présente Borel est boiteux. Il ne réunit que 5/18 de la probabilité. Où sont passés les 13/18 manquants ?
Puisque Borel fait fournir de petites cartes à Est et Ouest à partir des seules mains possibles, il y a des cas où par exemple, Est ayant 24V et Ouest 35R l'un doit fournir le 4 et l'autre le 5 avec une fréquence de présence et fourniture égale à $\frac{1}{24}$.
En comptabilisant tous les cas de ce type, on retrouve bien toute la probabilité de l'univers de donnes mais un fait doit nous interpeler :
Quand Est et Ouest fournissent le 4 et le 5 quelle est la probabilité que l'un d'eux ait RV ?

Elle est nulle évidemment !!!

Car si l'un des joueurs a le 4 et le 2 et l'autre le 5 et le 3, aucun d'eux, dès lors qu'on leur a donné 3 cartes, ne peut avoir RV.
La voilà la raison pour laquelle la probabilité calculée par Borel n'est pas la même que la probabilité de présence dans les jeux qui défilent dans les mains des joueurs.
Or il est bien évident que dans le jeu auquel nous jouons, si nous distribuons de façon aléatoire ♠5, ♠4 , ♠3 , ♠2 et ♥R , ♥V aux deux joueurs et que nous leur demandons de fournir chacun aléatoirement un pique, s'ils fournissent ♠5 et ♠4, la probabilité que l'un d'eux ait ♥RV ne peut être nulle. Cette probabilité doit être la même quelles que soient les 2 petites cartes fournies par Est et Ouest.
C'est donc que l'univers proposé par Borel est impropre à calculer la probabilité dans notre jeu.
Nous nous participons à une expérience aléatoire où quand le 4 et le 5 sont fournis, la probabilité de RV en Est est la même que quand ils fournissent le 2 et le 3. Et Borel lui illustre sa probabilité en se basant sur une expérience aléatoire dans laquelle la probabilité est celle qu'il prétend être dans le seul cas où le 2 et le 3 sont fournis !

La preuve par quatre.

Si la loi de Bayes selon Borel permet de calculer la probabilité de RV en Est (20%), elle permet aussi de calculer la probabilité de 4 en Est, de 5 en Est, de Roi en Est et de Valet en Est, toutes étant égales à $\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{2}$.

Quand le 2 et le 3 sont fournis, ces probabilités sont toutes évaluées à $\frac{1}{2}$.

Montrons maintenant les 2 mains, comportant chacune 2 cartes inconnues au moment où se pose le problème et inscrivons un numéro au dos de chaque carte inconnue.

Le calcul précédent nous ayant appris que chaque carte avait la même probabilité de se trouver en Est ou en Ouest, on peut estimer que la probabilité pour que la carte 1 soit le R est $\frac{1}{4}$.

Et une fois que ce R est en place, la probabilité pour que la carte 2 soit le V est $\frac{1}{3}$ (il ne reste que 3 places vacantes)

Et donc la probabilité pour que la carte 1 soit le R et la carte 2 soit le V est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Et on peut établir de même que la probabilité pour que la carte 1 soit le V et la carte 2 soit le R est aussi $\frac{1}{12}$.

D'où nous pouvons déduire que la probabilité de RV en Est est $\frac{1}{12} \times 2 = \frac{1}{6}$.

Or cette probabilité de $\frac{1}{6}$ trouvée en exploitant un résultat découlant de la formule de Bayes selon Borel, c'est justement la probabilité qu'on trouve dans l'univers des mains possibles et que Borel conteste en disant qu'elle est égale à 20%.
N'est-ce pas la preuve que la probabilité calculée par Borel n'est pas vraiment pertinente dans notre situation ?

Sur quelle illusion reposent le paradoxe de Borel et le paradoxe de la porte?

Borel a bien dit : Nous nous demanderons, **en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes**, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué.
Mais peut être aurait – il du faire fournir Est et Ouest à partir de toutes les distributions possibles des 6 cartes 3 par 3 et pas seulement à partir de celles qui situent 2 en Est et 3 en Ouest ?
Dans ce cas la probabilité de RV chez un joueur aurait été la même quel que soit le couple de petits piques fournis à la première levée.
Mais alors, le problème aurait été qu'à un moment où à un autre Ouest aurait fourni le 2 alors qu'au moment où se pose le problème nous savons que cette carte se trouve en Est. Et un univers où le 2 n'est pas en Est n'est pas non plus le nôtre. Borel sait bien que son univers ne doit contenir que les évènements possibles au regard de ce qu'il sait. Mais pourquoi ignore – t –il délibérément que la probabilité totale de son univers doive être 1 et non pas 5/18 ? Ce qui aurait dénoncé l'incohérence de cet univers au regard de ce qu'il veut démontrer, (à savoir : quand 2 petits piques sont fournis aléatoirement, la fréquence de RV en Est est 20%), puisque dans cet univers quand le 5 et le 4 sont fournis cette probabilité est 0.

En somme, le seul univers compatible avec le fait que Borel veut démontrer est un univers où le 2 et le 3 ne sont pas encore fournis et où l'on imagine ce que serait la fréquence de RV en Est quand le 2 et le 3 (ou n'importe quel couple de petites cartes) seraient fournies de façon aléatoire. Mais l'univers avant que nous sachions où se trouvent le 2 et le 3 est justement celui où la probabilité de présence de RV en Est, dans le référentiel des mains possibles, est 20%. Il n'est donc pas étonnant que dans un univers de donnes où l'on fournit 2 petites cartes avec ces distributions, RV se trouvent en Est avec la même fréquence.

En ce qui concerne le problème des 3 portes, nous observons les mêmes dérives. Un univers où la porte 2 peut être bonne ou la porte 3 ouverte n'est pas l'univers où nous nous trouvons quand se pose le problème. C'est un univers imaginé avant que le meneur de jeu n'ouvre une porte et à ce titre il traduit la probabilité telle qu'on peut la calculer à ce moment là sans invoquer une quelconque loi de Bayes, à savoir: la probabilité pour que la porte choisie soit mauvaise est 2/3.

Peut – être comprendrez-vous mieux où je veux en venir à travers un 3e exemple:
La première chose que vous voyez en débarquant sur une île est une pancarte sur laquelle on peut lire:
"Etat civil des adultes de l'île aujourd'hui:
140 familles formées de 40 hommes célibataires, 40 femmes célibataires, 60 couples femme + homme".
À peine avez-vous fini de lire la pancarte que vous rencontrez une adulte femme.
Quelle est la probabilité pour qu'elle soit mariée ?
Allez-vous vous fier à l'état – civil de l'île et estimer que cette probabilité est 60%?
Ou allez-vous imaginer que le chef de l'île tire au hasard une famille et si cela tombe sur un couple marié tire au hasard parmi le couple pour savoir s'il vous envoie l'homme ou la femme? Ce qui donnerait une probabilité de 3/7 pour mariée (autrement dit la proportion parmi les familles de celles qui sont mariées).
Il vous suffit d'examiner la nature de l'univers dans lequel vous vous trouvez pour en conclure que vous n'êtes pas dans un univers d'épreuves où il vous faudra revenir de nombreuses fois dans l'île pour éprouver la nature du mécanisme qui a mis cette femme en votre présence et donner de la crédibilité au second calcul (qui d'ailleurs revient à considérer que vous avez rencontré une famille et non pas une femme). Vous êtes dans un univers où vous avez rencontré une femme, pas dans un univers où vous auriez pu rencontrer un homme. Vous mettez une fois les pieds dans cette île et vous n'y retournerez pas. Quelles que soient les raisons pour lesquelles cette femme est là, c'est le hasard et lui seul qui l'a mise en votre présence. Et ce hasard vous enjoint de faire un zoom dans l'état civil sur l'ensemble des femmes et d'en déduire qu'il y a 60% de chances pour que celle – là soit mariée.

En conclusion, ce que démontrent ces exemples, c'est qu'une vision en fréquence de la probabilité n'est pas forcément opportune quand on nous demande de calculer la probabilité dans une épreuve unique.

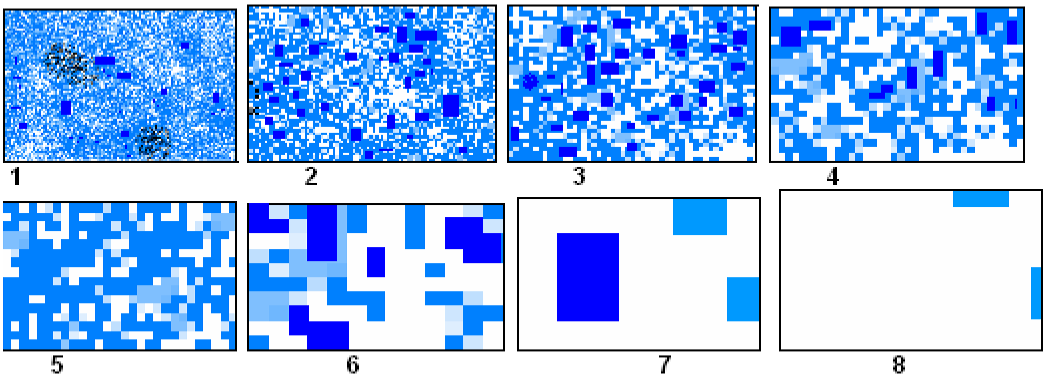
Lorsqu'un mécanisme en amont du problème (un meneur de jeu, un joueur de carte) gère la façon dont nous découvrons une partie de l'univers initial et que nous nous interrogeons sur la probabilité dans l'univers résiduel, suite à cette découverte, il est impropre d'utiliser la loi de Bayes en imaginant que le mécanisme aurait pu produire d'autres évènements que celui qui s'est produit.
On peut par contre mesurer les fréquences avec lesquelles l'univers initial subira telle modification ou telle autre mais jusque là nous avons remarqué que les fréquences calculées par ce procédé sont prosaïquement celles de l'univers initial (mauvaise porte 2 fois sur 3, RV en Est 1 fois sur 5, …).
Une fréquence qui ne peut en aucun cas être amalgamée à une probabilité dans l'univers résiduel car son calcul intègre des évènements qui sont incompatibles avec lui.

La loi de Bayes est propice à ce genre d'erreurs en ce sens qu'on l'emploie indifféremment dans des situations où les fréquences sont déterminées par rapport à la population d'un univers concret ou projectif mais passif (exemple d'une population où les sujets sont sains ou malades, vaccinés ou non vaccinés) et dans des situations où les fréquences sont déterminées par la succession de 2 actes (pas forcément aléatoires) ce qui est le signe qu'on se trouve dans un univers d'épreuves et donc un univers actif (univers de Borel ou univers des 3 portes).

Si ce genre de confusion est fréquent c'est que dans nos calculs de probabilité nous réagissons souvent comme des "casinomaniaques". Autrement dit nous estimons (sans vraiment en être conscients) que les probabilités étant nées de l'étude des jeux de hasard, il est justice que dans leurs conclusions elles s'inspirent le plus souvent de cette approche.
Aussi, au lieu de nous en remettre aux règles de l'axiomatique et d'étudier la configuration de l'univers et sa compatibilité avec notre situation, puis d'en quantifier les évènements par une mesure, nous faisons comme si nous trouvions à une table de casino où l'expérience aléatoire se répétant, nous devions faire appel à une martingale pour réagir judicieusement.
Martingale (du provençal martegalo, de Martigues) Système de jeu qui prétend, selon des principes fondés sur le calcul des probabilités, assurer un bénéfice certain dans les jeux de hasard.
Or la martingale n'a de sens que dans un univers d'épreuves et elle est sans fondement ni justification dans une épreuve unique.

La pertinence du zoom.

Dans une expérience aléatoire, considérer que l'univers est réduit à 2 portes au lieu de 3, considérer que la fourniture du 2 et du 3 de pique réduit l'univers aux seules mains possibles qui situent ces deux cartes là où on les a vues, reviennent à faire un zoom sur l'univers initial pour calculer une probabilité plus pertinente.
Mais il semble que ceux qui sont confrontés à des problèmes de ce type préfèrent au contraire prendre du recul et se situer dans un univers où ces évènements peuvent avoir lieu ou ne pas avoir lieu pour évaluer leur probabilité à l'aune d'une martingale.
Pourtant la parabole de la chute devrait les faire réfléchir.
La situation est la suivante:
Mille fusées situées en orbite haute vont retomber sur la planète Uncououiuncounon qui est composée à 59% de bleu de Bresse et à 41% de blanc cabécou.
Les techniciens de cap carnaval suivent la chute erratique des engins à travers 8 photos, de plus en plus rapprochées, de la zone où l'impact final est possible.
Comme les techniciens sont joueurs, ils parient sur la couleur du point d'impact.



Les casinomaniaques parient sur la zone bleue qui leur garantit un rapport substantiel (59%).
Les autres attendent la 8^{e} photo pour parier.
D'après vous quelle est la stratégie la plus rentable?
La 2eme évidemment. Bien sûr les casinomaniaques vont gagner leur pari dans 59% des cas.
Mais il suffit de regarder la 8^{e} photo pour comprendre que celui qui attend d'avoir le plus de détails possibles sur le point d'impact <u>va gagner son pari dans plus de 59 pour cent des cas</u>.
Au départ, on sait qu'environ 590 fusées sur mille tomberont sur la zone bleue. Mais si un zoom sur l'ensemble des possibles nous permet de parier sur la zone bleue quand elle est plus probable et sur la zone blanche quand elle est plus probable, la probabilité basée sur ce zoom sera non seulement plus pertinente au moment du zoom mais aussi plus rentable.

Cela – dit, si ces images proviennent d’un enregistrement préalable et qu’un technicien connaissant le résultat de chaque chute s’amuse à occulter par exemple 25% des chutes où la fusée va tomber sur le blanc (ou sur le bleu), l’expérience n’a plus rien d’aléatoire et les casinomaniaques ne sont plus assurés de faire 59% de gains sur le long terme.
Mais si l'on vous demande de calculer la probabilité au moment de la huitième image de la chute numéro 732, il n'y a aucune raison que vous ne procédiez pas en fonction des proportions de blanc et de bleu comme d'habitude car votre univers, à ce moment là se compose de ce que vous voyez sur la photo et que, par définition les probabilités demandées sont proportionnelles à la mesure des zones blanches ou bleues.
Il serait paradoxal d'essayer de modifier vos calculs en fonction des magouilles du technicien car ce serait renoncer au caractère aléatoire de l'expérience et donc à un quelconque calcul de probabilité.
Par contre si votre ambition est de cotiser pour votre retraite sans vous casser la tête, vous pouvez appliquer aux proportions initiales le coefficient multiplicateur découlant des magouilles du technicien (–25% pour le bleu ou le blanc) et parier systématiquement sur la couleur qui statistiquement sortira le plus souvent.
Mais vous aurez calculé une probabilité initiale (une fréquence moyenne sur l'ensemble des chutes) qui n'aura rien à voir avec la probabilité à la huitième image.

Panique au CNRS

Voici un extrait du "journal du CNRS".

Au tribunal comme ailleurs, il existe aussi de « mauvaises intuitions mathématiques » dues à des biais cognitifs…
L. S. : Oh que oui ! Je vais vous donner mon exemple préféré, car il rend tout le monde fou, y compris les mathématiciens et même les probabilistes. Imaginez que lors d'un voyage, votre voisin, en bavardant, vous fait savoir qu'il a deux enfants dont un fils qui, vous l'apprenez au passage, est né un mardi. La question est la suivante : quelle est la probabilité que l'autre enfant de cet homme soit une fille ?
Spontanément, on aurait envie de répondre 50 %, car savoir que l'un des enfants est un garçon ne préjuge en rien du sexe de l'autre. Eh bien c'est faux ! Car si on ne connaissait que le fait que l'un des enfants est un garçon, la probabilité que l'autre soit une fille serait de 2/3. En effet – sans compter les jumeaux –, les familles de deux enfants sont réparties en quatre types : gg, gf, fg et ff. Mais comme cette famille n'est pas du type ff (puisqu'il y a un fils), elle est forcément de type gg, gf ou fg ; ces trois types étant également répartis, il y a bien deux chances sur trois que l'autre enfant soit une fille.
Mais nous savons aussi que le garçon est né un mardi. Cela paraît incroyable, absurde, de penser que ce fait puisse changer la probabilité d'avoir une fille. Pourtant c'est bien le cas ! En effet, si l'on dresse la liste de toutes les possibilités d'avoir une famille de type gg, par exemple, avec tous les jours de la semaine, on arrive à 49 possibilités. Il en sera de même pour les familles de type gf et fg, soit un total de 147 possibilités. Si l'on écarte maintenant toutes celles qui ne contiennent pas un garçon né un mardi, il en reste exactement 27, dont 13 où l'autre enfant est un garçon, et 14 où il s'agit d'une fille. D'où une probabilité de 14/27 que l'autre enfant soit une fille… Il y a de quoi s'arracher les cheveux !

Vous remarquerez qu'on interroge L.S. sur "les mauvaises intuitions mathématiques dues à des biais cognitifs".
Pas sur "les mauvaises intuitions mathématiques dues à de mauvaises pratiques scientifiques".
Qu'est-ce "qui rend fou tout le monde y compris les mathématiciens et même les probabilistes" ?
Qu'on leur demande quelle est la probabilité qu'une personne de sexe inconnu soit une fille ou un garçon ?
Se pourrait –il qu'il y ait plus de deux issues à cette expérience aléatoire : "fille" ou "garçon" ?
Se pourrait –il que ces deux issues ne soient pas équiprobables ?
Se pourrait-il que l'univers découlant de la question qu'on nous pose, ne soit pas formé de deux issues, "fille" ou "garçon", équiprobables ?
Se pourrait –il alors que la réponse à la question posée ne soit pas 0,5 ou 50% ?

Qu'est – ce qui autorise un mathématicien à différencier un objet fille + garçon (fg) d'un objet garçon + fille (gf) ?
En quoi l'ordre dans lequel on cite ses composantes jouerait –il un rôle dans ce binôme ?
L'antériorité de la naissance a-t-elle une utilité quelconque dans la résolution de notre problème ? Où peut être que le fait que l'un d'eux soit dans une chambre bleue et l'autre dans une chambre rose a de l'importance ?
Est-ce qu'on nous demande la probabilité pour que l'autre enfant soit "une fille née avant le garçon" ou "une fille dormant dans la chambre rose" ? Non.
La seule possibilité que permet l'énoncé est de distinguer "connu, inconnu" mais de ce point de vue seul gf existe.
Alors pourquoi différencier fg de gf ?

La pratique qui consiste à ajouter artificiellement d'autres caractères aux enfants, comme l'antériorité de la naissance, la couleur de la chambre, le jour de naissance alors que le seul caractère auquel on s'intéresse est le sexe ne contribue – t –elle pas à pervertir l'énoncé du problème en suggérant qu'on pourrait utiliser d'autres univers, sans rapport avec celui que les probabilités exigent ? Des univers ou la déclinaison de ces caractères en modalités crée d'autres clivages, modifie les proportions entre classes, fausse notre approche d'un problème qui est à la base d'une simplicité exaspérante.

Et surtout, qu'est ce qui autoriserait un mathématicien scrupuleux quand on lui pose une question sur le sexe d'une personne à spéculer sur un univers où il y aurait deux personnes ?
La personne dont on connait le sexe peut –elle encore avoir quelque chose à faire dans le sac des personnes dont il faut deviner le sexe ?

En matière de probabilités, l'univers est directement hérité de la question qu'on nous pose.
Pour qu'il soit mathématiquement exploitable, l'énoncé d'un problème de probabilités doit permettre de définir à la fois le protocole de l'expérience aléatoire (autrement dit la nature de toutes les issues possibles) et la complexion de l'univers (autrement dit la quantification de l'univers au regard de ces issues).
Quand on nous demande la probabilité pour que le deuxième enfant d'une famille soit une fille, on se soucie comme d'une guigne du sexe, du jour de la naissance, de la couleur de la chambre du premier enfant dans la mesure où ces paramètres n'ont aucune influence sur la complexion de l'univers qui est exclusivement formé d'un deuxième enfant fille et d'un deuxième enfant garçon, ces deux issues étant équiprobables.

Le jour de naissance d'un enfant aurait une influence sur la probabilité du sexe d'un autre ! Pfff c'est n'importe quoi!
Comme quoi, il arrive que les "biais cognitifs" des gens simples s'avèrent quelquefois scientifiquement plus fiables que les suppositions hasardeuses de mathématiciens à la recherche d'un truc sensationnel à mettre dans le journal.

Le paradoxe de la belle au bois dormant.

La belle au bois dormant fait ce pour quoi elle est née : elle dort.
Quand on la réveille, elle ne se souvient de rien, elle reste éveillée une heure puis se rendort aussitôt.
Les 7 nains qui se sont trompés de conte, jettent une pièce en l'air le dimanche.
Si elle tombe sur pile ils réveilleront la belle le lundi puis la laisseront dormir le reste de la semaine.
Si elle tombe sur face ils réveilleront la belle le lundi, puis le mardi et la laisseront dormir le reste de la semaine.
Quand les nains réveillent la belle, ils lui expliquent à quoi ils jouent et ils lui demandent de déterminer la probabilité pour que la pièce qu'ils ont lancée le dimanche soit tombée sur face.
Etant très calée en probabilités, que doit – elle répondre ?
Bon il y a de grandes chances que, de prime abord, elle réponde "foutez – moi la paix, laissez-moi dormir".
Mais si on lui demande gentiment de faire un effort et qu'on lui fait croire que, si elle trouve la réponse juste, elle peut gagner un prince charmant, là peut être qu'elle va consentir à s'investir dans l'axiomatique.
Elle peut dire en gros "Si je comprends bien vous me demandez quelle est la probabilité pour que la pièce que vous avez jetée le dimanche soit tombée sur face ?" Équipée d'un Q.I. (et d'un coefficient aérodynamique) largement au dessus de la moyenne après avoir jeté un coup d'œil à sa calculatrice scientifique elle va vous répondre "1/2" et elle se rendormira sur le champ. Mais elle se ravisera aussitôt et vous dira "Ou alors vous me demandez de me situer dans un univers de réveils et vous voulez savoir avec quelle fréquence le mien suit un face ou un pile et alors là comme un face est suivi de deux réveils alors que le pile est suivi d'un seul, je dirais 2/3 pour le face" Et elle ajoutera d'une voix ensommeillée "Mais il faudra me garder éveillée longtemps si vous voulez me faire croire que c'est dans un univers de réveils que je peux trouver la probabilité d'un pile ou face. Et hop, dodo".
Et la beauté, la vraie, a toujours raison. Si la nôtre avait été moins encline à rejoindre le monde des rêves où on ne la réveille jamais, elle eut pu vous dire :
"Vous jetez une pièce en l'air, vous la cachez sous votre godasse, vous me réveillez et vous me demandez d'évaluer la probabilité de face. Mon univers se réduit aux deux côtés de la pièce qui est sous votre godasse et le caractère aléatoire du jeu fait que j'évalue à ½ la probabilité de face.
Que je sache que vous me réveillez cent fois après un face et une seule fois après un pile ne change rien à l'affaire.
La pièce qui est sous votre godasse a toujours un côté pile et un côté face et les deux côtés sont équiprobables.
Ah si votre question était "Si vous jouiez souvent à ce jeu avec quelle fréquence auriez-vous raison en disant "face" ?" cela m'obligerait à me situer dans un univers d'épreuves et à prendre en compte la fréquence des réveils au regard du résultat de la partie de pile ou face pour y répondre.
Mais mon problème n'est pas de gagner mon pari le plus souvent possible et si le mécanisme imposé à mes réveils est connecté avec celui qui produit des "piles" ou des "faces" il n'a pour autant aucune influence sur lui. Et quand vous me demandez "quelle est la probabilité pour que la pièce qui est sous mon pied soit tombée sur face ?" seul le second mécanisme est impliqué.
C'est toujours une histoire d'univers.
Et de vocabulaire aussi.
Parce que si vous voulez que j'effectue mon calcul dans un univers de réveils, vous eussiez été plus avisé de me demander, par exemple "Quelle est la probabilité pour que votre réveil suive un "face"". Et encore j'aurais pu vous faire remarquer que d'un point de vue purement axiomatique, faire l'amalgame entre une fréquence asymptotique dans un univers d'épreuves et une probabilité comporte certains risques. Me demander "avec quelle fréquence votre réveil suit – il un "face"?" eut été plus approprié."

Conclusion

En somme les paradoxes reposent toujours sur une transgression de l'axiomatique, le plus souvent un amalgame abusif entre l'univers réel de l'expérience aléatoire et un univers imaginaire constitué d'une série d'épreuves, influencées par le comportement non aléatoire d'un meneur de jeu, dans laquelle il faudrait trouver la fréquence à laquelle l'évènement proposé à notre évaluation se produit.
Pour prouver le caractère abusif de cet amalgame on a utilisé plusieurs procédés dont le test de la probabilité totale, mais ne suffit-il pas en somme de remarquer que certains évènements avérés dans notre épreuve (et donc de probabilité 1) ne sont que probables dans un univers d'épreuves (et donc de probabilité inférieure à 1).
Par exemple, dans le paradoxe de Monty Hall, il est avéré que j'ai choisi la porte numéro 1 et qu'on a ouvert la porte numéro 2. C'est donc qu'un univers où je pourrais choisir une autre porte que la numéro 1 et où l'on pourrait ouvrir une autre porte que la numéro 2 n'est pas celui où l'on me demande d'évaluer une probabilité. Or c'est bien ce qui se passe dans un univers d'épreuves.

En somme pour calculer une probabilité au sens mathématique, il est indispensable de veiller au respect de l'axiomatique.
Nous n'avons généralement pas à nous situer dans un univers d'épreuves (ou de réveils) sauf si l'énoncé en fait explicitement la demande mais dans ce cas, peut être vaut – il mieux parler de "fréquence" plutôt que de "probabilité".
Si je règle une machine pour qu'elle produise 3 états E1, E2, E3 avec une fréquence respective de F1, F2, F3 et que je demande au pékin avec quelle fréquence il sera confronté à E1, on conviendra que la réponse est triviale et ne nécessite aucun calcul.
Par contre la statistique s'intéresse à des univers d'épreuves d'une toute autre nature. De tels univers sont rendus mesurables grâce aux lois à densité qui dérivent plus ou moins de la loi binomiale qui voit une épreuve identique se répéter plusieurs fois. Mais dans chaque épreuve la probabilité est déterminée dans un univers classique et donc passif. Ce n'est pas l'univers d'épreuves qui permet de calculer la probabilité dans une épreuve mais au contraire la probabilité dans une épreuve qui contamine l'ensemble des épreuves et détermine les fréquences observables quand on procède à un grand nombre d’entre elles.
Pour calculer la probabilité dans une épreuve la notion d'instant est fondamentale car c'est elle qui fixe les limites de l'univers des possibles et donc la nature et le nombre (ou la mesure) des issues qui le composent.