Bridge et probabilités

Dans les années 1930, divers mouvements se sont créés, un peu partout, pour mettre de l'ordre dans les mathématiques. Il s'agissait de les reconstruire sur la notion primitive d'ensemble. Dedekind et surtout Boole et Cantor avaient fait les premiers pas dans cette direction au siècle précédent. Certains trouvèrent que cette approche (qui fonde le nombre et la logique) pouvait s'avérer très fertile pour rationaliser la démarche mathématique et préciser ses liens avec le réel et ils entreprirent d'en fédérer toutes les disciplines en leur donnant une base commune reposant sur une vision ensembliste.
C'est en 1939 qu'un groupe de mathématiciens, pour la plupart français, qui se cachait sous le pseudonyme de « Nicolas Bourbaki », a commencé ses travaux sur la théorie des ensembles. Des travaux qui allaient durer plusieurs décennies et marquer de leur empreinte les mathématiques modernes.
Emile Borel, après une carrière politique qui a duré 12 années (1924-1936), a repris ses cours à la faculté de sciences de Paris et en 1940, il va publier « Théorie mathématique du bridge à la portée de tous ». Un livre qui va fortement influencer des générations entières de bridgeurs.
Mais en 1933, un mathématicien russe, Kolmogorov, avait publié un livre autrement important qui jetait les bases de l'axiomatique des probabilités et il est dommage que Borel ne l'ait pas lu ou qu'il en ait délibérément ignoré les conclusions. La face de notre jeu en aurait été changée.

Espace de probabilités.

Ce que nous apprend Kolmogorov, c'est qu'avant de parler de probabilités **au sens mathématique**, il faut définir l'espace dans lequel on se situe.
La probabilité est une mesure et avant de procéder à cette mesure, il faut définir l'objet de notre mesure. La démarche axiomatique commence donc par la définition d'un espace de probabilités doté de certaines propriétés. Il nous faut :
A un ensemble **Ω** d'évènement élémentaires
B des classes d'évènements **A** qui sont des sous ensemble de **Ω**
C un procédé de mesure de la probabilité **P(A),** associée à tout sous ensemble **A** de **Ω**.
Cette mesure **P(A)** est comprise entre **0** et **1** et elle doit vérifier certaines propriétés qui ne sont en fait que la traduction en langage mathématique du concept intuitif de probabilité.
De plus les classes doivent former ce qu'on appelle « une Tribu » en mathématiques mais nous ne nous étendrons pas sur ce fait qui n'a aucune importance dans le cadre de cet exposé.

Donc, en matière de bridge nous aurions du choisir notre référentiel. Les faits qui nous intéressent sont : la répartition des couleurs, la situation de certaines cartes, la force d'honneurs, … Nous avons conscience que selon les hypothèses auxquelles nous nous intéressons, les faits qui les caractérisent sont plus ou moins rares et que donc, il est légitime d'attacher une probabilité à ces hypothèses.

Pourquoi, par exemple une distribution 9211 sera t –elle plus rare qu'une distribution 4432 ?
Parce que le procédé qui consiste à mélanger les 52 cartes, et à les distribuer une par une, produit plus rarement un 9211 qu'un 4432.
Tout simplement.
Comment quantifier la rareté du 9211 ?
En comptant toutes les mains possibles que peut produire la distribution des 52 cartes et en évaluant parmi elles la proportion des 9211.
Cette proportion est **la probabilité** pour que la distribution aléatoire nous octroie un 9211.

Quelle que soit l'hypothèse formulée, pour évaluer sa probabilité, on pourra comme dans cet exemple, se tourner vers la distribution aléatoire des cartes et faire le ratio des cas favorables à l'hypothèse et des cas possibles.
Voilà un bon début pour construire un système de probabilités.

● Ceci étant admis, nous allons considérer que **l'ensemble des mains possibles issues de la distribution aléatoire** est l'ensemble **Ω** d'évènement élémentaires qui fonde notre système de probabilités.
● Les sous – ensembles **A** qui forment les classes sur lesquelles on veut évaluer la probabilité coïncident avec l'ensemble des parties de **Ω** . Toute partie de **Ω** même si elle contient une main unique peut être dotée d'une probabilité cohérente.
● Dans **Ω** , les mains vérifiant une hypothèse **H** forment un sous ensemble **A** (qui peut être **Ω** lui-même ou l'ensemble vide). Le rapport du nombre de mains de **A** au nombre de mains de **Ω** est un nombre compris entre **0** et **1** vérifiant toutes les propriétés qui permettent de le qualifier en tant que probabilité (nous ne le démontrerons pas ici).
On dit que ce nombre est « **la probabilité de A (ou de H) dans Ω** ».

Ceci étant posé,

quelle est l'influence du stade auquel on évalue la probabilité sur la probabilité?

On distingue les stades suivants :

● le stade où les cartes ont été distribuées mais où aucun joueur n'en a pris connaissance (Quelle est la probabilité que l'une des mains comporte 7 cartes à pique ?) C'est le stade E_0.

● le stade des enchères où chaque joueur a pris connaissance de son jeu et spécule sur les probabilités en fonction de son propre jeu (Quelle est la probabilité pour que je sois fitté dans telle couleur ? Quelle est la probabilité pour que mon partenaire ait plus de 10H ?).
C'est le stade E_1.

● le stade où chaque joueur prend connaissance du mort. Chaque joueur spécule en fonction de ses propres cartes et de celles du mort. (Quelle est la probabilité du partage 32 des trèfles ? Quelle est la probabilité de telle ligne de jeu ?) C'est le stade E_2.

● le stade où les joueurs ont commencé le jeu de la carte. Chaque joueur spécule en fonction des cartes situées (localisées de façon certaine) chez les autres et de ses propres cartes. (sachant qu'il reste 3 piques dans la main d'ouest et aucun pique dans la main d'Est, la ♣D est plus probable en Est). C'est le stade E_3.

Au regard de notre définition de la probabilité nous devons faire une constatation dont l'évidence ne peut être contestée: Evoluer d'un stade à un autre ne signifie pas qu'on conserve la définition de l'ensemble Ω qui était en vigueur au stade précédent et qu'on s'intéresse à la probabilité d'un sous ensemble de Ω.

Evoluer d'un stade à une autre revient à réduire Ω.

Par exemple, au stade E_0, vous pouvez imaginer des mains possibles chez chaque joueur qui contiennent le ◆2, mais, au stade E_1, quand vous prenez connaissance de votre jeu :

- Soit le ◆2 est chez vous et toutes les mains possibles qui pouvaient le situer chez un autre joueur ont disparu de Ω.
- Soit le ◆2 n'est pas chez vous et toutes les mains possibles qui le situaient chez vous ont disparu de Ω.

Si le nombre de mains possibles a diminué dans Ω, c'est bien qu'il a été réduit.

Que les probabilités soient affectées par ce processus est un fait évident :

Par exemple, si Sud s'intéresse à la probabilité pour que le ◆2 soit en Ouest.

Au stade E_0, il constitue le sous ensemble A des mains qui, dans Ω, attribuent le ◆2 à Ouest, il les compte, il en divise le nombre par le nombre de mains de Ω attribuées à Ouest et il trouve que cette probabilité est 1/4.

Au stade E_1, si le ◆2 est chez lui la probabilité pour que le ◆2 soit en Ouest est devenue 0 , si le ◆2 n'est pas chez lui, cette probabilité est devenue 1 / 3 .

Du moment que Ω n'est plus le même d'un stade à l'autre, toutes les probabilités sont à priori différentes d'un stade à l'autre et on doit les recalculer.

À la lumière de ces constatations, on peut réexaminer la notion de stade et la définir comme suit :

Au cours du déroulement d'une donne de bridge, on peut appeler « stades » les étapes qui débouchent sur une réduction de l'ensemble Ω des mains possibles par rapport à ce qu'il était à l'étape précédente.

Ce qui signifie qu'à y regarder de plus prés, le stade $\mathbf{E_3}$ du jeu de la carte n'est pas à proprement parler un stade. La localisation de toute carte ou de tout ensemble de cartes débouche sur une nouvelle définition de l'ensemble des possibles, ce qui fait que

Le jeu de la carte est décomposé en une succession de stades. Chaque stade correspond à la fourniture d'une carte qui jusque là était considérée comme inconnue (ou plutôt non localisée) par le joueur qui évalue la probabilité.

Ceci dit, en règle générale, tout joueur n'apprécie **utilement** la probabilité qu'à l'issue de chaque levée, ce qu'il fait qu'il va considérer les stades intermédiaires comme secondaires.

Aux premiers stades d'une donne (E_0 à E_2) l'information qui nous permet de modifier Ω nous parvient de manière brutale, par paquets de 13 cartes. (aucune carte localisée, mes 13 cartes localisées, les 13 cartes du mort localisées) .

Aux stades suivants, la communication de l'information est progressive et dépend de l'ordre dans lequel sont jouées les cartes.

Au début du jeu de la carte, toute carte jouée fait disparaître un grand nombre de mains possibles de Ω (des millions). Ce nombre diminue au fur et à mesure que la donne se déroule. Mais le rapport des mains possibles entre un stade et le stade suivant est tel (de l'ordre 2 , 3 ou plus selon la quantité d'information véhiculée par chaque carte) qu'on peut considérer qu'il s'agit d'un véritable changement d'échelle au sein du paysage des possibles. L'importance de ce rapport d'échelle permet d'apprécier l'importance de la fourniture d'une carte, quelle qu'elle soit, dans le processus qui débouche sur la modification des probabilités.

Un problème se pose : celui de la comparaison des probabilités entre stades.

À partir du moment où l'ensemble de référence, celui des mains possibles, rétrécit d'un stade à l'autre, les probabilités entre stades sont –elle comparables ?
À tous les stades, on mesure la même chose : la proportion de mains possibles qui vérifie une même hypothèse. Cela devrait suffire à établir que la comparaison d'une même probabilité à des stades différents a un sens.

Mais en fait, on peut faire mieux, pour montrer la compatibilité des probabilités aux divers stades d'une donne :

Appelons Ω **l'ensemble des possibles au stade E_2** c'est à dira **au stade où le mort est connu mais où le jeu de la carte n'a pas commencé (**à ce stade Est et Ouest se partagent les 4 plus petits carreaux ♦2345)

et appelons Ω_1 **l'ensemble des possibles après la première levée**, quand on a situé le ♦2 en Ouest et le ♦3 en Est.

évènement A = ♦2 en Ouest et ♦3 en Est

Dans Ω_1 ils est **certain** que l'évènement **A** est réalisé.

- Calculons **dans** Ω_1 la probabilité pour que le ♦4 et le ♦5 soient tous les deux situés en Ouest (**évènement B**).

évènement B = ♦4 en Ouest et ♦5 en Ouest

Ce calcul est simple,
Quand 2 cartes ont été localisées, il reste 24 places vacantes dans les mains du flanc.
Pour situer le ♦4 en Ouest on dispose de 12 places vacantes sur 24,
puis pour situer le ♦5 en Ouest il reste 11 places vacantes sur 23.
Donc on a **P(B)** = $\frac{12}{24} x \frac{11}{23}$.(indépendamment du nombre de carreaux du flanc)
On pourrait aussi compter les mains de Ω_1 , parmi ces mains compter celles qui situent ♦4 et ♦5 en Ouest, faire le ratio des 2 nombres, on trouverait le même résultat :
P(B) = $\frac{12}{24} x \frac{11}{23}$

Dans Ω_1, la probabilité de **B** ne dépend que de la configuration de Ω_1 lui-même.

- Situons nous maintenant **dans** Ω, un instant auparavant et essayons d'observer la conjonction des évènements à réaliser pour déboucher sur la même situation.
Dans Ω, avant que ne débute le jeu de la carte, nous pouvons nous poser la question suivante : « Si je suppose que le ♦2 est en Ouest et le ♦3 en Est, quelle est la probabilité pour que le ♦4 et le ♦5 soient tous les deux en Ouest ? » Autrement dit « En supposant que **A** est réalisé, quelle est la probabilité de **B** ».

Donc, cette probabilité que nous appelons **P(B)** dans Ω_1 **existe aussi dans** Ω mais nous l'appelons **P(B \ A)** ce qui se lit « probabilité de B quand A est réalisé » ou « probabilité de B sachant A ».

La différence entre ces deux concepts (**P(B)** et **P(B \ A)**) est subtile :
● Dans Ω_1 **A** est réalisé (donc certain) et **B** n'est pas lié à **A** .
● Dans Ω **A** n'est que probable et la probabilité de **B \ A** est liée à celle de **A**.

Dans Ω nous pouvons calculer la probabilité pour que **A** soit réalisé, c'est-à-dire la probabilité pour que le ◆2 soit en Ouest et le ◆3 en Est. Comme dans Ω il existe 26 places vacantes, 13 en Ouest et 13 en Est, en situant d'abord le ◆2 en Ouest puis le ◆3 en Est, on trouve que

P(A) = $\frac{13}{26} x \frac{13}{25}$

Toujours dans Ω, nous pouvons calculer la probabilité pour que (**A et B**) soit réalisé, c'est-à-dire la probabilité pour que le ◆2 , le ◆4 et le ◆5 soient en Ouest et le ◆3 en Est .

Le procédé des places vacantes nous donne **P(A et B)** = $\frac{13}{26} x \frac{13}{25} x \frac{12}{24} x \frac{11}{23}$.

Remarquons que toutes les probabilités calculées par le procédé des places vacantes donneraient les appliquait l'analyse combinatoire à l'ensemble des mains possibles (c'est à dire si l'on comptait une à mains favorables à l'hypothèse pour laquelle on veut évaluer la probabilité) .

Maintenant, nous allons utiliser la formule dite « des **probabilités conditionnelles** » qui nous permet, dans **Ω**, de calculer

P(B \ A) = $\frac{P(A\,et\,B)}{P(A)}$ = $\frac{12}{24} x \frac{11}{23}$

● Nous découvrons que P(B \ A) dans Ω est égale à P(B) dans Ω_1.

Cela est vrai quel que soit l'évènement B considéré. Ce qui prouve que les probabilités entre stades sont absolument compatibles, puisqu'en appliquant a un stade la condition (A) qui va restreindre l'ensemble des possibles à un stade ultérieur, la formule des probabilités conditionnelles nous permet de retrouver toutes les probabilités qu'on pourra évaluer au stade ultérieur.

En somme, **appliquer une condition à un ensemble des possibles revient à le réduire** et de ce fait, il existe des passerelles entre les stades mais elles ne fonctionnent que dans le sens descendant (du stade antérieur au stade ultérieur).

Mais attention, dans Ω **P(A et B)** n'est pas égal à **P(B)x P(A)** parce que ces évènements ne sont pas **indépendants** (P(B) n'est pas la même selon que le ◆2 et le ◆3 sont ou non situés dans les flancs).

Ce qui fait que **P(B)** dans Ω n'est en général pas égal à **P(B)** dans Ω_1.

Cet exemple nous permet donc de faire la constatation suivante :

Calculer la probabilité de l'évènement A au cours du stade E_3, une fois que Est a fourni telles cartes et Ouest telles autres, revient à calculer au stade E_2 (avant que ne débute le jeu de la carte), une probabilité conditionnelle: la probabilité de l'évènement A en supposant que Est et Ouest possèdent les cartes qu'ils vont fournir au stade E_3.
Plus généralement, une probabilité du stade E_n peut être assimilée à une probabilité conditionnelle du stade E_{n-1}

Les probabilités des stades ultérieurs sont héritées des probabilités des stades antérieurs.

Cela prouve que la notion de probabilité définie et appliquée au stade E_0 est encore valable et significative aux stades ultérieurs et notamment au cours du jeu de la carte.

En matière de bridge, s'interroger sur la probabilité d'une hypothèse H, c'est, à tout moment, se demander combien la distribution aléatoire a pu produire de main possibles, parmi les mains possibles, combien elle a pu produire de mains vérifiant l'hypothèse H, et, en vertu du principe d'équiprobabilité des mains découlant la distribution aléatoire, considérer que la probabilité de H est le rapport du nombre de mains favorables à l'hypothèse H , par le nombre de mains possibles.

Le référentiel reste celui des main possibles, le procédé de calcul de la probabilité reste le même à tous les stades, ce qui change c'est l'ensemble des possibles, qui subit une réduction chaque fois qu'une carte ou un ensemble de cartes est localisé dans une main quelconque.
Pour que notre dispositif soit cohérent, il faut qu'il soit équivalent de considérer qu'**à chaque instant de la donne,** l'ensemble des possibles est

● l'ensemble des mains effectivement possibles à ce stade en fonction des faits avérés au cours de la donne,

ou

● un ensemble de mains dérivant de l'application d'une ou de plusieurs conditions à l'ensemble initial (ou un ensemble antérieur) des mains possibles.

Par ailleurs, en quoi consiste une réduction de l'ensemble des possibles ? C'est tout simplement une opération qui nous dit que certaines des probabilités calculées aux stades antérieurs étaient fausses (puisque certaines combinaisons considérées comme possibles ne l'étaient pas en réalité) et que celles que nous calculons au stade présent sont plus pertinentes.

En fait les ensembles Ω de mains possibles sont inclus les uns dans les autres, les plus centraux correspondant aux dernières évaluations. Leur diagramme de Venn donne l'image d'une cible dont le centre est occupé par la main réelle dont nous essayons de percer le mystère.

Une fois défini le système de probabilités, une fois définis les stades comme les étapes qui réduisent
une fois admis que le processus des probabilités conditionnelles permet d'illustrer la façon dont le sta
probabilités du stade antérieur, la pertinence et la cohérence du dispositif mis en place ne devraient p
esprit.

Il est **universellement** admis par les théoriciens du bridge que les probabilités des stades antérieurs (E_0 , E_1 , E_2) sont calculées dans le référentiel des mains possibles, mais aucun ne semble mesurer l'importance de ce fait.. Nous venons de démontrer que les probabilités aux différents stades du jeu de la carte (E_3) utilisent elles aussi ce référentiel et que le processus de définition des probabilités conditionnelles établit d'ailleurs un lien, une filiation, entre les probabilités du stade E_3 et les probabilités du stade antérieur. Mathématiques, logique et cohérence militent en faveur de l'adoption du dispositif de calcul de la probabilité appliquée au bridge dont nous venons de définir les grandes lignes. Pourtant nous verrons que les théoriciens historiques du bridge, négligent les conclusions de l'axiomatique, ne veillent pas à l'utilisation d'un référentiel unique qui seul est garant de la cohérence des probabilités à tous les stades d'une donne et changent de procédé de calcul comme de chemise sans se soucier ni de la nature de l'objet qu'ils mesurent, ni de l'instrument qu'ils utilisent pour le faire. Après avoir accepté une définition de la probabilité aux premiers stades d'une donne, ils en utilisent une autre au stade du jeu de la carte sans que la transgression des règles scientifiques et logiques qu'implique cette façon de procéder ne les gêne en aucune façon. Peut être n'en ont-ils même pas conscience.

Appliquons le procédé de calcul que nous avons défini à certaines situations courantes en bridge.

Probabilité de situation d'une carte

Nord Sud jouent le contrat de 4♠ en fit 4–4 de la main de Sud, dans le silence adverse.
Très tôt, il va apparaître que notre contrat dépend de l'emplacement de la ♣D que nous pouvons prendre des deux côtés en orientant convenablement une impasse.
Les flancs encaissent ♥ARD puis ressortent à ♦.
Sud prend et joue atout.
Au 2e tour Ouest défausse le ♦5 dévoilant les atouts 4–1.

À la fin de la 6e levée, la situation est la suivante :

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5							
Est	♥2	♥3	♥D	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

Ce diagramme dévoile
- les cartes localisées dans chaque flanc (6 en Ouest , 8 en Est)
- les cartes encore non localisées (on dit encore inconnues) de chaque flanc **7** en Ouest, **5** en Est.

► **Une main possible** en Ouest est de la forme

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5	x	x	x	x	x	x	x

Où les **7**x forment une combinaison de **7** cartes encore non localisées parmi les **12** qui restent encore en jeu.

Combien compte – t – on de mains possibles en Ouest ?

C_{12}^{7} = nombre de combinaisons de **12** cartes **7** à **7** = **792.**

► **Parmi ces mains combien contiennent la ♣D ?**

Une main d'Ouest contenant la ♣D a la forme suivante :

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5	♣D	x	x	x	x	x	x

Où les **6**x forment une combinaison de **6** cartes encore non localisées parmi les **11** (♣D exclue) qui restent en jeu.
Le nombre de combinaisons de **11** cartes **6** à **6** est :

C_{11}^{6} = **462**

► **Quelle est la probabilité de la ♣D en Ouest à la fin de la 6e levée ?**

$$\frac{C_{11}^{6}}{C_{12}^{7}} = \frac{462}{792} = \frac{7}{12}$$ (= 58,33%)

Nous faisons une remarque très importante : la probabilité de trouver la ♣D en Ouest à la fin de la 6e levée est égale à **7 / 12** soit le rapport du nombre de cartes non localisées d'Ouest (**7**) au nombre total de cartes non localisées (**12**) à la fin de la 6e levée.
Si nous remplaçons « nombre de cartes non localisées » par « nombre de places vacantes », nous pouvons formuler la loi qui caractérise à tout instant la probabilité de trouver une carte non localisée quelconque dans une main :

Loi des places vacantes :

À tout instant, la probabilité de trouver une carte non localisée dans une main donnée est égale au rapport du nombre de places vacantes de cette main par le nombre total des places vacantes.
En particulier, au cours du jeu de la carte, si **W** est le nombre de cartes non localisées en Ouest et **E** le nombre de cartes non localisées en Est, la probabilité de trouver une carte non localisée donnée en Ouest est :

$$Pw = \frac{W}{W+E}$$

Faisons plusieurs remarques importantes :

● Equivalence des cartes non localisées

la probabilité de trouver la ♣D en Ouest est la même que la probabilité d'y trouver le ♣2, le ♦6 ou une autre carte non localisée.
À un instant donné toutes les cartes non localisées ont la même probabilité de se trouver dans une même main.

● Lien entre la probabilité en Est et la probabilité en Ouest

si la probabilité de trouver une carte en Ouest est **Pw** , **la probabilité de trouver cette même carte en Est** est , bien sûr,
Pe = 1 – Pw (ou 100 – Pw si on exprime ces probabilités en pourcentages)

● Equiprobabilité entre les deux mains

Quand chaque jeu comporte le même nombre de places vacantes dans chaque flanc, on a
Pw = Pe = 50%
Par exemple, si dans notre donne le déclarant bat 4 fois atout, la situation va évoluer de:

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5							
Est	♥2	♥3	♥D	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

à la fin de la **6**^e^ levée (**Pw = 58,3%**)
à

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5	♦4	♣6					
Est	♥2	♥3	♥D	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

à la fin de la **8**e levée et la probabilité de la ♣D en Ouest (ou en Est) sera devenue **Pw = 5/10 = 50%**.

● Probabilité de trouver plusieurs cartes du même côté

Pour estimer **la probabilité de trouver plusieurs cartes en Ouest** (par exemple la♣D et le ♣2) à la 6e levée, on procède ainsi :
La probabilité de trouver la ♣D en ouest est **7/12**.

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5	♣D						
Est	♥2	♥3	♥D	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

Une fois que cette carte sera en Ouest, la probabilité d'y trouver le ♣2 sera **6 /11**.

La probabilité de trouver la ♣D et le ♣2 en ouest est égale au produit de ces deux probabilités.

P(♣D et ♣2 en Ouest) = $\frac{7}{12}.\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$ (= **31,8%**)

⬤ Probabilité de trouver plusieurs cartes de chaque côté

Pour estimer **la probabilité de trouver une carte en Ouest** (par exemple la♣D) **et une autre en Est** (par exemple le ♣2) à la 6^{e} levée, on procède ainsi :

La probabilité de trouver la ♣D en ouest est **7/12**.

Une fois que cette carte sera en Ouest, la probabilité de trouver le ♣2 en Est sera **5 /11**.

La probabilité de trouver la ♣D en ouest et le ♣2 en Est est égale au produit de ces deux probabilités.

P(♣D en Ouest et ♣2 en Est) = $\frac{7}{12}.\frac{5}{11}=\frac{35}{132}$ (= **26,5%**)

On pourrait étendre les procédés de calcul de la probabilité de situation de 2 cartes que nous venons de voir à autant de cartes qu'on veut.

⬤ Test de cohérence

Vous avancez qu'à la fin de la 6^{e} levée, la probabilité pour que la ♣D soit dans la main d'Ouest est **p** .

Il reste **7** cartes non localisées dans la main d'Ouest et **5** dans la main d'Est.

Montrez les **7** cartes qu'Ouest a encore en main à ce stade (en jaune sur le diagramme):

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**	**♦2**	**♠2**	**♦5**							

La probabilité pour que la ♣D soit l'une de ces **7** cartes est donc **p** .

Désignez maintenant une carte au hasard parmi ces **7** cartes :

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**	**♦2**	**♠2**	**♦5**			**X**				

Elle a les mêmes chances qu'une autre de ces **7** cartes d'être la ♣D.

Donc, la probabilité pour que cette carte soit la ♣D est **p/7**

p/7 est aussi la probabilité pour que cette carte soit le ♣2 (ou le le ♦6 ou l'une quelconque des **12** cartes non localisées).

L'évènement **« cette carte est la ♣D »** est évidemment incompatible avec l'évènement **« cette carte est le ♣2 »** (ou une autre des **12** cartes non localisées).

Donc d'après les propriétés élémentaires de la probabilité.

la probabilité de l'évènement **« cette carte est la ♣D OU le ♣2 OU le ♦6 OU ...l'une quelconque des 12 cartes non localisées »** est :

p/7 + p/7 + ...+p/7 (12 fois) soit **12p/7**.

Or l'évènement **« cette carte est la ♣D OU le ♣2 OU le ♦6 OU ...l'une quelconque des 12 cartes non localisées »** est **une certitude**.

Cette carte est forcément l'une des **12** cartes non localisées.

Donc la probabilité de cet évènement est **1**.

Et on a donc **12p/7 = 1**

En conclusion, si quelqu'un vous dit que la probabilité cherchée est différente de **7/12**, riez lui au nez et démontrez lui que c'est impossible, à moins qu'il ne refuse l'évidence que suite à la distribution aléatoire des cartes, un bout de carton a la même probabilité qu'un autre de se trouver dans une main quelconque.

Probabilité de partage d'une couleur

Supposons un stade quelconque du jeu de la carte.

Par exemple celui là (fin de la 3e levée) :

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**										
Est	**♥2**	**♥3**	**♥D**										

Le nombre de mains possibles pour Ouest est

C_{20}^{10} = **184756**

Sachant que **Est – Ouest se partagent 5 trèfles**, les **20** cartes non localisées sont **5** trèfles et **15** non – trèfles .

On peut calculer la **probabilité pour qu'Ouest ait exactement 3 trèfles** en comptant les mains possibles de ce type :

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**	**3 trèfles parmi 5**	**7 non - trèfles parmi 15**

Pour les 3 trèfles, il y a

C_5^3 = **10** combinaisons possibles.

Pour les 7 non – trèfles il y a

C_{15}^{7} = **6435** combinaisons possibles

On construit toutes les mains contenant 3 trèfles en associant chaque combinaison de 3 trèfles à toutes les combinaisons de non – trèfles.

Donc en tout il y a :

6435 x 10 = 64350 mains possibles en Ouest contenant exactement 3 trèfles.

Et, à ce stade,

la probabilité de trouver les trèfles 3 en Ouest et 2 en Est est

64350 / 184756 = 34,8%

Faisons quelques remarques importantes

● Calcul et relation fondamentale entre les probabilités de partages

Cet exemple montre comment on peut calculer les probabilités de partage d'une couleur à un instant quelconque.

Il suffit de calculer successivement, à cet instant, les probabilités pour qu'Ouest ait **0 , 1 , 2 , 3, 4** et **5** trèfles (toujours selon le même procédé) et on aura couvert tous les cas possibles.

Si on note **Pw(0♣), Pw(1♣) , ... , Pw(5♣)** ces probabilités on a, bien sûr :

Pw(0♣) + Pw(1♣) + ... + Pw(5♣) = 1

● symétrie ou asymétrie des probabilités de partages

Dans cet exemple comme dans tous ceux où il y a autant de places vacantes en Ouest qu'en Est , les probabilités de partage d'une couleur sont symétriques.

On a **Pw (n♣) = Pe(n♣)** la probabilité d'avoir n trèfles est la même en Est et en ouest
Par exemple la probabilité d'avoir 3 trèfles est la même en est qu'en Ouest.
et

Pw(n♣) = Pe((5–n)♣) la probabilité d'avoir n trèfles en Ouest est égale à la probabilité d'avoir 5 – n trèfles en Est.
Par exemple la probabilité d'avoir 3 trèfles en Ouest est égale à la probabilité d'en avoir 5–3 = 2 en Est.

Dans le cas où les probabilités sont symétriques on peut dire aussi que **Pw(n ♣) = Pw((5–n)♣)** .
Par exemple la probabilité de 3 trèfles en Ouest est la même que la probabilité de (5–3) = 2 trèfles en Ouest.

Par contre lorsque le nombre de places vacantes est différent dans chaque flanc
Pw(n ♣)≠ Pw((5–n)♣) la probabilité de 3 trèfles en Ouest n'est plus la même que la probabilité de 2 trèfles en Ouest
Pw (n♣) ≠ Pe(n♣) la probabilité d'avoir n trèfles n'est plus la même en Ouest et en Est.
La probabilité d'avoir plus de trèfles est plus importante dans la main qui a le plus de places vacantes
Mais évidemment, la relation

Pw(n♣) = Pe((5–n)♣)

est toujours vraie puisqu'à une main comportant par exemple 1 trèfle en Ouest correspond une main comportant 4 trèfles en Est.

Par exemple dans cette situation :

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♦5							
Est	♥2	♥3	♥D	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

Les probabilités de partages sont à peu prés les suivantes :

	5♣	4♣	3♣	2♣	1♣	0♣
Ouest	2,6%	22%	44,2%	26,6%	4 ,4%	0,2%
Est	0,2%	4,4%	26,6%	44,2%	22%	2,6%

On voit que la probabilité d'avoir 3♣, 4♣, 5♣ (trèfles majoritaires) est toujours plus grande en Ouest du côté où il y a le plus de places vacantes, alors que pour les trèfles minoritaires (0♣ , 1♣ , 2♣) c'est le contraire.
Cela n'est pas très surprenant.

Dans le cas où les probabilités sont symétriques on peut dire que la **probabilité des trèfles 3–2** est **2 Pw(3♣)** ou, dans les cas général,
Pw(3♣)+Pe(3♣).

Ajoutons que les non – trèfles peuvent être considérés comme une couleur et si à un instant donné, on a **K** cartes non localisés dans une main, on doit avoir **Pw(n♣) = Pw((K– n) non♣).**

Par exemple, si l'on se réfère au dernier exemple **K=7** et **Pw(3♣) = 44,2%** donc **Pw(4 non ♣) = 44,2%**

● Evolution des probabilités de partages d'une couleur au cours d'une donne.

En supposant que les flancs fournissent symétriquement et que la connaissance des 2 mains reste équilibrée, calculons les probabilités de partage de 5 trèfles à divers stades de la donne.

Le stade i correspond à la fin de la $i^{\text{ème}}$ levée. Le stade **0** est l'instant initial, avant que ne débute le jeu de la carte :

STADE ➜	0	4	8	9
Partage 3–2	**67,8%**	**71%**	**79,4%**	**85,7%**
Partage 4–1	**28,3%**	**26,2%**	**19,8%**	**14,3%**
Partage 5–0	**3 ,9%**	**2,8%**	**0,8%**	**0%**

De l'examen de ce tableau on tire la loi de compression :

Loi de compression

Au fur et à mesure du déroulement d'une donne les probabilités de partage d'une couleur varient.
Seule la probabilité du partage le plus équitable augmente au détriment des partages les moins équitables.
Ce mouvement s'accélère lorsque les partages les moins équitables disparaissent du paysage des possibles.
Tout se passe comme si, au fur et à mesure que diminue le nombre de places vacantes, la couleur était comprimée au sein d'un espace de plus en plus restreint et que, de ce fait, elle tende à constituer un tas de plus en plus homogène d'où sont bannies les répartitions les plus exotiques.
D'où le nom donné à la loi.

Bien sûr tous les partages sont soumis à cette règle.

● La couleur ensemble arbitraire.

Du point de vue du calcul, la couleur est un ensemble de cartes arbitraire qui n'a aucune influence sur la probabilité.
De la même façon qu'un honneur ne revêt pas plus d'importance qu'une petite carte.
Par contre il est vrai que les règles du bridge, obligation de fournir de la couleur, préservation des honneurs en vue de faire des levées, dévoilent parfois le partage d'une couleur sans qu'on ait besoin de fournir toutes ses cartes et les informations ainsi obtenues ont un impact certain sur la probabilité, le plus souvent en induisant une dissymétrie dans la connaissance des deux mains du flanc.
Par exemple, Ouest défausse du pique au second tour de la couleur, ou fournit le roi visiblement sec sur l'as et on apprend que la couleur est partagée 4- 1 ce qui permet **momentanément** de localiser plus de cartes dans une main que dans l'autre.

● Du point de vue des probabilités, **il est équivalent de considérer une couleur de n cartes ou un ensemble de n cartes quelconques**.
Par exemple, au début du coup, la probabilité pour que les 5 trèfles soient partagés 3–2 est **67,8%.**
Soient maintenant 5 cartes non localisées au début du coup : 2♣ , 5♥ , 4♦, 3♠, ♣D.
Alors, au début du coup, la probabilité pour que ces 5 cartes soient partagés 3–2 est **67,8%.**
En cours de donne, les probabilités de partage de ces 5 cartes vont suivre la même loi de compression que les probabilités de partage d'une couleur de 5 cartes.

● Soient 4 carreaux (♦2 , ♦3 , ♦4, ♦5) formant initialement une couleur du flanc.
La probabilité **initiale** nous indique que la couleur est moins souvent partagée **2–2 (40,7%)** que **3–1 (49,7%)** .
Mais si à la première levée Ouest fournit le ♦2 et Est le ♦3 , il ne faut pas s'étonner qu'**à la fin de la première levée**, les carreaux restants soient plus souvent partagés **1–1 (52,2%)** que **2–0 (47,8%)** car lier les 4 carreaux entre eux comme s'ils étaient collés les uns aux autres est une douce plaisanterie.
En fait tous les carreaux, si l'on excepte le fait que les règles du bridge nous obligent à les fournir simultanément, sont indépendants les uns des autres.
Initialement, il existe aussi une probabilité que le ♦4 et le ♦5 soient partagés **1–1 (52%)** ou **2–0 (48%)** et si l'on se place de ce point de vue, les probabilité de partage de ces 2 cartes **à la fin de la première levée**, (**1–1 (52,2%)** et **2–0 (47,8%)**) après qu'elles aient subi une légère compression, n'ont rien de surprenant.
D'ailleurs, les probabilités de partage de ces 2 carreaux (le ♦4 et le ♦5) **à la fin de la première levée** seraient exactement les mêmes si au lieu d'avoir localisé deux carreaux à la première levée, on avait localisé par exemple le ♥2 et le ♥4 ou tout autre couple de cartes. Ce qui prouve qu'ils n'héritent pas leur probabilité de l'appartenance à une couleur.

● En somme, si initialement j'ai une couleur de 5 trèfles, après avoir joué un tour de la couleur où les 2 flancs ont fourni, pour juger de la probabilité de partage des 3 cartes restant en jeu, je dois me référer à ce qu'était initialement les probabilités de partage de ces 3 cartes (en appliquant la loi de compression) et non considérer que ces probabilités sont héritées de ce qu'était initialement le partage des 5 cartes (par exemple probabilité du partage 2–1 héritée de ce qu'était initialement la probabilité du partage 3-2). Ce raisonnement n'a aucun fondement logique.

● La plupart des auteurs attachent une importance injustifiée à la notion de couleur.
Pour l'illustrer reprenons le premier exemple sur lequel nous travaillions :
Nord Sud jouent le contrat de 4♠ de la main de Sud, dans le silence adverse.
Très tôt, il va apparaître que notre contrat dépend de l'emplacement de la ♣D que nous pouvons prendre des deux côtés en orientant convenablement une impasse.
Les flancs encaissent ♥AR, ♦A puis ressortent à ♦.
Sud prend et joue atout.
Au 2^{e} tour Ouest défausse le ♦5 dévoilant les atouts 4–1.
À la fin de la 6^{e} levée, la situation est la suivante :

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♦4**	**♦2**	**♠2**	**♦5**							
Est	**♥2**	**♥3**	**♦A**	**♦3**	**♠3**	**♠4**	**♠5**	**♠6**					

La plupart des auteurs considèrent que c'est la dissymétrie des piques qui fonde la probabilité.
Ils font comme si les cœurs et les carreaux n'avaient pas été fournis et que la situation soit la suivante :

Ouest					♠2								
Est					♠3	♠4	♠5	♠6					

Comptant **12** places vacantes en Ouest et **9** en Est il évaluent **Pw** à **12 / 21** .
Ce procédé n'a évidemment aucune justification logique, et en outre il révèle une incohérence lorsqu'on applique le test de vérification de la probabilité de situation à la configuration obtenue en fin de 6^{e} levée.
Mais pourquoi les piques ? Pourquoi pas les cœurs, les carreaux et les trèfles ? Parce que dans l'esprit de ceux qui ont bâti ces lois, les petites cartes fournies par les flancs sont sans importance, elles n'ont aucune influence sur la probabilité.
Curieusement ils ne les prennent en compte que lorsqu'il ne reste au plus qu'une carte non localisée de la couleur.
Par exemple, s'il s'avérait que le flanc possédait initialement **6** carreaux, les **5** carreaux fournis seraient pris en compte et il y aurait **9** places vacantes dans le jeu d'ouest pour **7** dans le jeu d'est et la probabilité s'en trouverait affectée : **Pw = 9 / 16** au lieu de **12 / 21** mais là encore le test de cohérence révèlerait une erreur.
Pourquoi cette obligation de ne prendre une couleur de longueur **n** en compte que lorsqu'on a localisé au moins **n–1** de ses cartes ?
Bien sûr il n'y a aucune raison logique, aucun argument mathématique ne justifie une telle règle. Mais il est possible que le théoricien l'ait adoptée pour lever une objection pratique.
Par exemple, supposez qu'initialement le flanc se partage 5 piques,7 cœurs, 8 carreaux et 6 trèfles.
Le flanc encaisse les 3 premières levées à cœur, sort carreau, le déclarant tire 4 coups de pique, joue le ♦R , son dernier pique, puis ♣AR et on en arrive à la situation suivante où il ne reste en jeu que la ♣D et le ♦10. :

Ouest	♥A	♥R	♥D	♦2	♠2	♦4	♦5	♦6	♦8	♣2	♣4	♣5	
Est	♥2	♥3	♥4	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6	♦9	♥3	♣3	♣7	

Si on ne peut pas prendre en compte les carreaux et les trèfles fournis, il y a **9** places vacantes en Ouest et **5** en Est.
La probabilité de la ♣D en Ouest est **Pw = 9/14 = 64,3%**
Et la probabilité du ♦10 en Ouest est donc **35,7%.**
Qu'il ne reste que 2 cartes à découvrir et que la probabilité de chacune d'elle d'être la ♣D ne soit pas la même ne gênerait pas outre mesure les bridgeurs. Ces derniers aiment bien tirer des donnes où les piques sont **1–4** pour illustrer que la probabilité que la ♣D se retrouve en Ouest **12** fois sur **21**, quelles que soient les péripéties qui ont émaillé la donne. L'ennui c'est que si l'on tire de telles donnes, le ♦10, lui aussi se retrouvera en Ouest **12** fois sur **21.** Alors comment expliquer que dans notre exemple la dépression créée par le partage des piques soit plus favorable à la ♣D qu'au ♦10 ?
Et puis, à ce stade nous ne pouvons formuler que deux hypothèses : « carreaux **6–2** et trèfles **3–3** » soit « carreaux **5–3** et trèfles **4–2** » .
Dans les deux cas la dissymétrie de **4** cartes en faveur d'Ouest vient annuler la dissymétrie des piques et la probabilité **PW** devrait être **50%**.
Alors pour gommer ce vilain **64,3%** que nous donne la première stratégie de calcul, vite, vite, battons le rappel des carreaux et des trèfles et proclamons que notre loi des places vacantes doit prendre en compte les petites cartes d'une couleur quand il n'en reste qu'une dehors.
En utilisant cette nouvelle règle, on trouve bien que **Pw = 50%** au stade où nous présentons la donne. Et ouf ! nous pouvons faire face aux objections que soulève la première façon de faire.

Voilà, en gros comment a du fonctionner le théoricien qui a énoncé cette loi. Mais on aura du mal à trouver la moindre caution scientifique à cette démarche.

Non en fait, les 3 petits carreaux défaussés sur les 3 coups de piques ont autant d'importance que les piques. Pourquoi en serait – il autrement?
Ce qui compte, nous l'avons dit, c'est **le nombre de cartes localisées**, pas les couleurs presque entièrement localisées ou le procédé de localisation. Le rang des cartes, lui non plus n'a pas d'importance ; les 3 petits cœurs fournis aux premières levées ont autant d'importance que ARD. Les deux petits carreaux fournis à la 4^{e} levée, eux aussi bouchent leur trou et suppriment une place vacante dans chaque main.
Si nous en arrivons à la situation suivante :

Ouest	♥A	♥R	♥D	♦2	♠2	♦4	♦5	♦6					
Est	♥2	♥3	♥4	♦3	♠3	♠4	♠5	♠6					

Peu importe que le flanc ait eu initialement **6** carreaux où qu'il en ait eu **7**.
Comment peut on prétendre que la probabilité **Pw** de la ♣D en Ouest serait, à ce stade, **50%** dans un cas et **57%** dans l'autre ?
En réalité, à ce stade, le sac de chaque joueur présente la même aptitude à recevoir cette dame donc **Pw = 50%** .

Cette propension a considérer que les petites cartes fournies librement ne comptent pas (pas plus d'ailleurs que les petites cartes que l'on est forcé de fournir parce que l'obligation nous en est faite) traduit en fait une tendance bizarre. Dés que commence le jeu de la carte, le bridgeur semble oublier que c'est la distribution aléatoire du début de la donne qui a fixé toutes les proportions et donc toutes les probabilités et il semble s'attacher à la seule façon dont l'adversaire fournit ses cartes. Mais en quoi la façon dont l'adversaire fournit des cartes équivalentes pourrait elle modifier des probabilités qui ont été fixées par un processus antérieur à la fourniture ?
Voit – on apparaître une petite carte ? Pfff elle ne compte pas puisqu'il pouvait aussi bien en fournir une autre ?
Supposons qu'Ouest entame (ou défausse) le ♦2, les bridgeurs me disent « en quoi voulez vous que la connaissance de cette carte modifie la probabilité ? C'est que Borel appelle ''**une carte incolore**''. Elle ne compte pas ».
Pour vous peut être. Mais moi je sais que sur l'ensemble des donnes où Ouest possèdera ce ♦2, en l'absence de tout autre renseignement sur les mains du flanc, je serais fondé à chercher la ♣D en Est parce que sa probabilité en Est (ou sa fréquence si vous préférez tirer un millier de donnes pour en faire l'expérience) sera **52%** et non plus **50%,** ce qu'elle serait, si l'on n'avait pas localisé ce ♦2.
Je pourrai aussi démontrer que si le ♦2 est en Ouest la probabilité de contenir **4** trèfles sur **5** sera plus importante en Est qu'en Ouest, alors que ces probabilités étaient égales avant que je n'ai localisé ce ♦2.
C'est donc que la localisation de ce ♦2 est déterminante dans l'évaluation d'une probabilité.
Peut être que pour vous en convaincre devrions – nous ajouter qu'avant que le ♦2 n'apparaisse on pouvait dénombrer **10.400.600** mains **possibles** dans un flanc alors qu'après que nous l'ayons localisé, il n'en reste plus que **5.200.300**.
Une carte localisée 5 millions d'hypothèses en moins.
Pas important du point de vue des probabilités ce ♦2 ?
Alors que les probabilités sont la science du possible.

Partage et situation

● Places vacantes au sein d'une couleur

Supposons qu'au début du coup on sache (par exemple grâce à une enchère) que
les trèfles adverses sont partagés 5 en Ouest et 3 en Est.
Quelle est la probabilité de la ♣D en Ouest ?
L'adversaire se partage 8 trèfles et 18 non – trèfles.
Les mains possibles en Ouest sont de la forme.

Ouest	**5 ♣ sur 8**	**8 non – trèfles sur 18**

On compte
$C_8^5 x C_{18}^8$ mains possibles.

Les mains situant la ♣D en Ouest sont de la forme

Ouest	**♣D**	**4♣ sur 7**	**8 non – trèfles sur 18**

On compte
$C_8^5 x C_{18}^8$ mains possibles contenant la ♣D.

Donc la probabilité de la ♣D en Ouest est

$$\frac{C_7^4}{C_8^5} = \frac{5}{8}$$

On devine la loi qui se dessine à travers cet exemple :

Places vacantes au sein d'une couleur intacte
Au sein d'une couleur partagée **n – p** dont on n'a localisé individuellement aucune carte, la probabilité de trouver une carte de cette couleur dans la main qui en a **n** est

$$\frac{n}{n+p}$$

Remarquons que la probabilité ne dépend pas du nombre de non trèfles. Donc cette loi est vraie si les trèfles non localisés sont partagés n – p quelque soit le stade du jeu de la carte.

Maintenant supposons qu'en cours de jeu nous localisions quelques trèfles.
Par exemple 2 trèfles de la main qui en avait 5.
La situation est la suivante.

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**	**♦2**	**♠2**	**♣2**	**♣3**						
Est	**♥2**	**♥3**	**♥D**	**♦3**	**♠3**	**♠4**	**♠5**	**♠6**					

Il reste à localiser 6 trèfles et 5 non trèfles.

Nous savons que **les trèfles restants sont partagés 3–3**.

Les mains possibles en Ouest sont de la forme

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♣2	♣3	♣	♣	♣			

3 trèfles parmi 6   voisinent avec 3 non - trèfles parmi 5

$C_6^3 x C_5^3$ mains possibles.

Les mains possibles contenant la ♣D sont de la forme

Ouest	♥A	♥R	♥4	♦2	♠2	♣2	♣3	♣D	♣	♣			

2 trèfles parmi 5   voisinent avec 3 non - trèfles parmi 5

$C_5^2 x C_5^3$ mains possibles contenant la ♣D

Probabilité de la ♣D en Ouest

$$\frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{3}{6} = 50\%$$

Donc la probabilité suit la loi des places vacantes au sein de la couleur

Places vacantes au sein d'une couleur

Si, à un stade quelconque, il reste **n** cartes non localisées d'une couleur dans une main et **p** cartes non localisées de cette couleur dans l'autre

La probabilité de trouver une carte de la couleur dans la main qui en a **n** est

$$\frac{n}{n+p}$$

C'est une forme particulière d'une loi plus générale :

Places vacantes au sein du plus petit ensemble de cartes non localisées dont on

Si, à un stade quelconque, on connaît **n** cartes non localisées d'un ensemble dans une main et **p** car
ensemble dans l'autre

La probabilité de trouver une carte de cet ensemble dans la main qui en a **n** est

$$\frac{n}{n+p}$$

Pour donner un exemple, on cherche la ♣D, on sait que le flanc possède les 4 dames (encore non localisées) et qu'il y en a 3 en Est.
La probabilité de trouver la ♣D en Ouest est ¼.
Bien sûr, à la table ce cas de figure nous sera rarement utile.

● Le test de connexion des 2 formes de probabilités.

À un stade quelconque de la donne, supposez qu'il reste 5 trèfles en jeu dont la dame.
Vous devez savoir calculer

● La probabilité de la ♣D en Ouest (**Pw**)

● Les probabilités de partage des trèfles

Pw(0♣)=P(0) , Pw(1♣)=P(1), ……, Pw(5♣)=P(5).

il existe une formule qui vous permet de vérifier la cohérence de vos calculs.

Vous devez avoir

$$Pw = \frac{0}{5}P(0)+\frac{1}{5}P(1)+\frac{2}{5}P(2)+\frac{3}{5}P(3)+\frac{4}{5}P(4)+\frac{5}{5}P(5)$$

Cette formule qui décompose seulement le calcul de la probabilité de situation d'une carte selon tous les cas de partage de sa couleur, peut évidemment être adaptée quelle que soit la taille de la couleur restant en jeu.
Nous appellerons cette loi, **la loi de connexion**, car elle permet de connecter deux types de probabilités sans rapport évident entre elles: les probabilités de partage d'une couleur et la probabilité de situation d'une carte de cette couleur par une équation permettant de **présumer** de la validité des calculs.

Faisons un test

Dans cette situation :

Ouest	**♥A**	**♥R**	**♥4**	**♦2**	**♠2**	**♦5**							
Est	**♥2**	**♥3**	**♥D**	**♦3**	**♠3**	**♠4**	**♠5**	**♠6**					

La probabilité de la ♣D en Ouest est **PW = 7/ 12 = 58,33%**

Nous avions calculé que les probabilités de partages étaient à peu prés les suivantes :

	5♣	**4♣**	**3♣**	**2♣**	**1♣**	**0♣**
Ouest	**2,6%**	**22%**	**44,2%**	**26,6%**	**4 ,4%**	**0,2%**
Est	**0,2%**	**4,4%**	**26,6%**	**44,2%**	**22%**	**2,6%**

Ajoutons 5/5 de 2,6% **(2,6%)** +4/5 de 22% **(17,6%)** + 3/5 de 44% **(26,4%)** + 2/5 de 26,6% **(10,64%)** + 1/5 de 4,4% **(0,88%)**

Et on trouve **58,12%** c'est à dire **Pw** à l'incertitude sur tous les calculs prés.

Qu'en déduire ?

Nous n'avons pas fait la preuve qu'il existe une seule combinaison de 6 nombres **P(0) , P(1), ….. ,P(5)** telle que

P(0) + P(1)+ ….. +P(5) = 1

et

$$Pw = \frac{0}{5}P(0)+\frac{1}{5}P(1)+\frac{2}{5}P(2)+\frac{3}{5}P(3)+\frac{4}{5}P(4)+\frac{5}{5}P(5)$$

D'ailleurs on peut démontrer en fait qu'il existe plusieurs combinaisons vérifiant simultanément ces 2 équations.

Donc la vérification de la formule de connexion n'est pas une **preuve** de la justesse de nos calculs.
Ceux – ci sont simplement **présumés justes**.
Mais si par contre l'application de la formule de connexion avait débouché sur une inégalité, c'est que, sans l'ombre d'un doute, l'un ou l'autre des calculs (situation ou partage) serait faux.

Prenons un autre exemple (le célèbre **moindre choix**) :
Je joue 7♠ et je dois manier la couleur suivante :

En Nord **♠ R7654**
En Sud **♠ A1098**

Ouest entame carreau, je prends en SUD, je joue le ♠A , Ouest met le ♠2 et Est le ♠V .
Je rejoue pique, Ouest met le ♠3. Comment dois je poursuivre ?

● Si je m'en remets aux probabilités de partage du ♠3 et de la ♠D , elle était de **52%** pour **1–1** au début du coup. Elle a légèrement augmenté (loi de compression) à la fin de la 2e levée (**52,4%**). Tous ces chiffres préconisent plutôt de tirer en tête, puisqu'à la fin de la 2e levée, les piques sont plus souvent ♠3 en Ouest, ♠D en Est (**26,2%**) que ♠3 et ♠D en Ouest (**23,8%**) .
Au stade où je dois prendre la décision finale, la situation est la suivante :

Ouest	♦2	♠2	♠3									
Est	♦3	♠V										

● Si je m'en remets au principe des places vacantes, la probabilité de la ♠D en Ouest est **10/21** soit **47,6%.** Il vaut mieux tirer en tête.
● Quant aux probabilités de partages des piques restant en jeu ...?
Ce n'est pas compliqué, il ne reste qu'un pique. En Ouest on a **P(1) = 47,6%** et **P(0) = 52,4%.**
N'est – il pas normal que le seul pique restant en jeu préfère se nicher dans la main qui a le plus de places vacantes ?
Donc **Pw = 47,6%** nos calculs et estimations sont cohérents, il vaut mieux tirer en tête.
● C'est aussi ce que préconiserait la règle des 9 si notre couleur était ainsi distribuée :

En Nord **♠ RV654**
En Sud **♠ A1098**

Qu'on ait récolté le ♠2 et le ♠7 sur l'as et que le ♠3 apparaisse en Ouest au début de la 3e levée et la règle des 9 nous recommanderait de tirer en tête, pour prendre la dame, plutôt que faire l'impasse.
Et les raisons pour tirer en tête seraient les mêmes que dans l'exemple précédent. Que la distribution aléatoire répartisse entre les flanc ♠DV32 ou ♠D732 ; elle utilise les mêmes règles, distribue en Est autant de DV que de D7 et il serait incompréhensible que dans un cas les probabilités préconisent de faire l'impasse et dans l'autre de tirer en tête.
● D'ailleurs c'est une règle générale : **quand on a le choix entre tirer en tête et faire l'impasse, le seul cas où il faut tirer en tête est celui où la seule carte non encore localisée de la couleur est la carte recherchée**.
C'est le cas dans les deux situations précédentes, c'est encore la cas quand on manie

En Nord **♠ ARD10**
En Sud **♠ 987**

Quand au 3e tour de pique on joue de la main de Sud vers celle de Nord et qu'Ouest fournit son 3e petit pique, il vaut mieux tirer en tête pour 4 levées car le ♠V est le seul pique restant en lisse.

Le mécanisme qui régit cette loi est relativement simple : avant que Sud ne joue vers Nord, supposons que la probabilité de trouver l'honneur **H** en Ouest soit **50%**. Quand Ouest a joué, places vacantes obligent, la probabilité **P** de trouver **H** en Ouest est toujours inférieure à **50%**.

● S'il reste au moins 2 cartes non localisées de la couleur (**H** et une autre carte), la probabilité de trouver **H** sec en Est est toujours inférieure à **P**. Donc il vaut mieux faire l'impasse que tirer en tête.

● Mais si **H** est la seule carte restant en jeu , la probabilité de trouver **H** sec en Est est **1–P** et comme **P** est inférieure à 50% , **1–P** est supérieure à 50%. Dans ce cas, il vaut mieux tirer en tête.

Cela fait pas mal d'arguments pour vous convaincre de tirer en tête et bien pourtant tous les experts, dans la première situation étudiée, préconisent de faire l'impasse au 2e tour de la couleur au nom de la règle dite du **moindre choix**. Ils étayent leur affirmation par un calcul de probabilité alambiqué donnant prés de **65%** à la ♠D en Ouest à la fin de la 2e levée, dans cette situation :

Ouest	♦2	♠2										
Est	♦3	♠V										

Nous aurons d'autres occasions de monter en quoi cette affirmation est fausse.
Pour l'instant contentons nous de remarquer qu'à la fin de la 2e levée la loi de connexion donne en Ouest :

P(0) = 23,8% P(1) = 52,4% , P(2) = 23,8% (symétrie des probabilités de partage).

Appliquons la formule de connexion :

65% = ½ de **52,4% + 23,8% = 50%**.

65% =50% !!!

Il y a donc quelque chose qui cloche et pourtant les probabilités de partage des 2 piques restant en jeu ne peuvent être guère différentes de ce qu'elles étaient avant que ne débute la donne à savoir **P(0) = 24% , P(1) = 52% , P(2) = 24%** selon un consensus général.

On peut donc parier sans risque de se tromper que ce qui cloche c'est cette probabilité de **65%** qui est manifestement contradictoire avec de nombreuses conclusions du calcul classique.

● Places vacantes en dehors d'une couleur

Cette fois, le problème est différent : on sait que les trèfles sont partagés 5–3 (5 en Ouest) et on cherche à localiser la ♥D. (ou un non – trèfle quelconque) .
Les mains possibles en Ouest sont toujours de la forme.

Ouest	**5 ♣ sur 8**	**8 non – trèfles sur 18**

On compte

$C_8^5 x C_{18}^8$ mains possibles

Les mains possibles contenant la ♥D sont de la forme

Ouest	**5 ♣ sur 8**	**♥D**	**7 non – trèfles sur 17**

$C_8^5 x C_{17}^7$ mains possibles contenant la ♥D

Et la probabilité de la ♥D en ouest est

$$\frac{C_{17}^7}{C_{18}^8} = \frac{8}{18}$$

Dans ce cas tout se passe comme si les trèfles, bien qu'ils ne soient pas individuellement localisés occupaient des places vacantes.
En dehors des trèfles il reste en Ouest **8** places vacantes sur **18**.
Donc la probabilité de la ♥**D** en Ouest est **8/18**.

On retrouve **la loi du plus petit ensemble de cartes non localisées contenant la ♥D dont on connaît le partage**.
Ici cet ensemble est celui des non – trèfles que l'on sait partagé 8 – 10 .
Donc la probabilité de la ♥D dans la main qui contient 8 non – trèfles est 8/18.

Cette probabilité ne va pas évoluer tant que des trèfles seront fournis.
Par contre, si on localise des non trèfles, il faudra revoir leur partage et modifier en conséquence la probabilité de la ♥D en Ouest.

Probabilité d'une force d'honneur.

En matière de bridge, les bons auteurs sont ceux qui pensent que notre jeu n'a pas encore dit son dernier mot, et qu'il peut encore progresser dans tous les domaines. Notamment celui des enchères. C'est pourquoi, quand un bon livre prétend à une certaine exhaustivité, comme c'est le cas de « La majeure par cinq » de J.M. Roudinesco, on y trouve des tableaux indiquant les probabilités de trouver une force d'honneur chez un joueur, soit immédiatement après la distribution des cartes, au stade E_0, soit au stade E_1, lorsqu'un joueur spécule, en fonction de sa propre force sur les chances d'un adversaire ou d'un partenaire de posséder une force d'honneur donnée.

Par exemple voici quelques probabilités données par Roudinesco

Au stade $\mathbf{E_0}$ en moyenne chacun des 4 joueurs touche 40 divisé par 4 = **10H**
10H va donc être la force de plus grande probabilité.

H	%
0-5	14%
8	8,9%
10	9,4%
12	8%
15	4,4%
17	2,4%
10-11	18,3%
12-14	20,6%
15-17	10,1%
18-19	2,6%
20-23	1,3%
24+	0,2%

Au stade $\mathbf{E_1}$ si le joueur qui spécule a **13H**, il trouvera chez l'un des 3 autres joueurs en moyenne (40–13) divisé par 3 = **9H**:
9H va donc être la force de plus grande probabilité.

H	%
0-5	18%
6-9	38%
10-11	17%
12-14	18%
15-17	7 %
18-19	1,4%
20-23	0,4%
24+	0,2

La **loi de la moyenne** est valable dans toutes les situations où l'on compte les points

Sud	Ouest	Nord	Est
1SA	--	--	?

En moyenne, Est au réveil contemplera **9–10H** (25000 tirages en situation). Il aura **8–11H** dans environ 40% des cas.

1 Est contemple **10H** et spécule sur le sort d'un réveil .
Il sait que Ouest et Nord se partagent entre **13 et 15H** (plus souvent **15H**) et que Nord est en principe limité à **7–8H**.
En moyenne, il va trouver **7** ou **8** points chez son partenaire, c'est aussi sa force la plus probable.
Comme c'est aussi le cas pour Nord, il aura assez souvent passé avec le maximum (**7H**).
La zone totale de la ligne E–O devrait graviter le plus souvent **18–19H**

2 Est contemple **5H**
La moyenne d'Ouest et Nord se situe entre 9 et **10H**.
Attention, il est très probable que Nord ait passé avec **7H** et que notre ligne soit très minoritaire avec de **16** à **18H** en tout.

3 Est contemple **15H**.
Moyenne Ouest – Nord entre **4** et **5H**.
Notre ligne devrait compter autour de **20H** en moyenne (et le plus souvent). Mais la main forte est soumise.

Pour savoir, par exemple, s'il vaut mieux affecter à une enchère un sens forcing, limite ou faible, pour juger de l'espérance mathématique d'un effort, c'est bien entendu sur un tableau donnant la probabilité des forces d'honneurs que nous étayerons notre stratégie. Et les données qu'il contient sont d'autant plus précieuses qu'elles sont rarement publiées et plus difficiles à calculer que les probabilités de situation ou de partage.

● Le mode de calcul

● Pour calculer la probabilité pour qu'au stade **E_0** un joueur ait exactement **8H**, il faut d'abord envisager toutes les façons de combiner des honneurs pour faire 8H et leur attribuer un poids en nombre de jeux qui tient au nombre de non – honneurs (NH) parmi 36 accompagnant les honneurs.
Par exemple

2 as (6 cas)	11 NH sur 36	1.201.310.592 mains
4 dames (1 cas)	9 NH sur 36	94.143.280 mains
1 as + 2 dames (24 cas)	10 NH sur 36	6.100.484.244 mains
4 valets + 2 dames (6 cas)	7 NH sur 36	50.086.080 mains
TOTAL		**X mains**

Puis on divise **X** (le nombre de main dont le total des points totalise **8H**) par le nombre de mains possibles pour le joueur qui est un nombre astronomique. **635.013.559.600**

Et on trouve la probabilité pour un joueur d'avoir **8H** au stade **S0** que Roudinesco nous dit être **8,9%.**
Plus simple, on utilise un ordinateur programmé pour tirer des donnes aléatoires, (25000 par exemple) on lui demande de calculer la fréquence des donnes où l'un des joueurs a **8H**. On fait la moyenne des 4 joueurs. **9,02%.** Un chiffre très proche de celui donné par Roudi.

● Pour calculer une probabilité au stade E_1 c'est beaucoup plus compliqué.
Roudinesco nous dit « supposons que vous ayez **X** points, la probabilité pour que l'un des 3 autres joueurs ait **y** points est .... ».
Son tableau balaie toutes les possibilités pour **y** entre **0** et **40–X.** (limité à **24H**)
Donc en supposant que vous ayez **16H** le tableau de Roudinesco va donner pou l'autre joueur, mettons votre partenaire:

pts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Etc..
%	0,8	1,7	2,7	4,6	6,8	8,5	9,8	10	10,9	10,2	9,1	

On peut faire confiance à l'auteur, ce tableau est juste. Il doit synthétiser en principe toutes les possibilités d'avoir **Y** points en face de toutes les possibilités d'avoir **16H.**
Mais dans la pratique, supposez que vos **16H** soient formés de **4** rois + **4** valets.
Quelle est la probabilité que votre partenaire ait 1, 3 , 5, .. ou un nombre impair de points ?
0% puisque du moment qu'il ne reste que des as (4 pts) et des dames (2 pts) dans la nature son nombre de points est forcément un nombre pair.
Cet exemple, très marginal, était destiné à vous démontrer que même si ces tableaux sont justes et très utiles, il faut tout de même s'entourer de précautions dans leur utilisation.
Ceci dit, sans l'aide d'un ordinateur, leur confection est un vrai travail de fourmi, long et fastidieux et nous devons remercier leur(s) auteur(s) de nous les avoir communiqués.

Le volet « système » de cet ouvrage comporte un chapitre sur l'ouverture de 2SA. On y trouve une étude sur le problème suivant :
L'ouverture de 2SA est chère et il n'est pas très facile, pour ne pas dire impossible, de retrouver tous les fits à un niveau raisonnable, de dire si les efforts de chelem du répondant proviennent de mains limites ou fortes, de vérifier la présence de tous les contrôles et de bénéficier d'un Blackwood.
Sauf cas exceptionnel, une main limite de l'effort de chelem est un unicolore 6^{e} de 8–9H, un 5–4 de 9–10H, un 4–4 de 11–12H, un 4333 de 12H. Dans de nombreux cas, en standard, nous devons renoncer à zoner l'effort. Il arrive très souvent que nous débutions la recherche des contrôles à un niveau tel que nous ne pouvons pas la mener à terme avant le niveau de 4SA et qu'il faille choisir entre contrôles et BW.
Or quand le répondant déclare qu'il a une main limite et qu'il en a esquissé la composition, il devrait posséder, en principe, des honneurs utiles, et, si possible, pas de dames ou de valets dans les couleurs courtes. De la même façon, la richesse en contrôles devrait fortement conditionner l'attitude de l'ouvreur face à la sollicitation dont il est l'objet puisque c'est sur la complémentarité des mains qu'on va jouer le chelem avec un total en points un peu en dessous de la norme.
Nous avons donc tenté de bâtir un système de développement, assez proche du standard, qui permette de découvrir tous les fits à un niveau raisonnable et qui permette de dire au répondant, une fois qu'il s'est décrit, si son effort provient d'une main limite ou d'une main propre avant le niveau de 4SA (inclus). Cette façon de procéder nous oblige à renoncer aux contrôles mais on dispose toujours d'un Blackwood.
Pour pouvoir évaluer le coût de notre renonciation aux contrôles, il a fallu mesurer la probabilité qu'il en manque un quand la zone totale se situe entre 29 et 33H.
Cette étude rejoint donc ce volet des probabilités et c'est à ce titre que nous la signalons à votre attention

Probabilités complexes

Si, par exemple, vous voulez utiliser la convention qui consiste à dire 2♥ sur l'ouverture de 1♦ avec une main faible (5-8H) comportant au moins 5♠+4♥ , il ne serait pas inutile de connaître
1) la probabilité d'une telle main face à cette ouverture
2) la probabilité d'un fit majeur quand l'ouvreur aurait fait une redemande de 2♣ ou de 2♦ sur 1♠ . Ou ce qui est encore plus difficile à juger la nature et la fréquence du meilleur contrat (qui peut être à carreau).
Ensuite et ensuite seulement, vous pourrez juger de l'utilité de la convention en la comparant à un autre usage de l'enchère de 2♥.
Encore qu'il faudrait effectuer cette comparaison en termes de marque, puisque la marque est le moteur du jeu.

On pourrait théoriquement mener ces calculs à bien avec les outils que nous donnent les probabilités mais la tâche serait colossale et demanderait beaucoup de soins et de temps. Il est de loin préférable, quand on en a la possibilité, d'utiliser un ordinateur programmé pour produire une ouverture de 1♦ en Sud, et de compter la fréquence du jeu espéré en Nord

Les conclusions

● fréquence de 5♠+4♥ (au moins)+ au plus 2 carreaux + **5–9H** en face de l'ouverture de 1♦ ➜ **2%**
● En face de ce type de main la forme de l'ouverture a la forme suivante :

6♦	➜ **17%**
5♦+4♣ (au moins)	➜ **25%**
5♦+4♥ ou 5♦+ 4♠	➜ **10%**
Mains régulières	➜ **48%**

● Utilité de la convention ➜ 52 % de 2% soit **1%** au plus (dans certains cas il doit être préférable de jouer en mineure)

À vous de voir si ça vaut le coup.

De nombreuses conventions devraient, comme celles là, être passées au crible de l'informatique.
A sortie, il y aurait quelques surprises.

Tu me la Bayes belle !

On a donné la loi de Bayes aux bridgeurs comme un joujou permettant d'étayer leurs convictions mais c'est une erreur lourde de conséquences.

Quelle déception de découvrir, Emile Borel (le Borel du théorème de Borel – Lebesgue) empêtré dans ses efforts désordonnés pour établir une « théorie mathématique du bridge » et plus parfaitement dévoilé dans les deux essais sur les probabilités qui accompagnent cet ouvrage dans le bouquin édité chez J. Gabay ! On y découvre que ses rapports avec les probabilités (qu'il enseigne à la fin de sa vie après une carrière politique au plus haut niveau) et plus particulièrement avec la logique sont surprenants ! Il n'a visiblement aucune estime pour la démarche axiomatique dont il pense qu'elle pervertit le lien des mathématiques avec le réel sans contrepartie positive. C'est bien dommage car l'application des principes édictés par Kolmogorov en 1933 à la théorie du bridge lui aurait évité bien des erreurs. Au lieu d'entreprendre son étude à la hussarde, ne donnant aucune définition, imposant la pertinence d'un calcul au détriment d'un autre sans aucune caution que l'autorité et la compétence du maître, affichant de nombreuses contradictions, émettant des assertions qui galvaudent la logique élémentaire, il aurait dû commencer, modestement, par définir un espace de probabilités (un ensemble d'évènements élémentaires, des classes d'évènements, une fonction de probabilité sur les classes s'apparentant à une mesure et dotée de certaines propriétés incontournables) et à partir de là, jamais il n'aurait été confronté, comme c'est souvent le cas dans ses ouvrages, à deux procédés de calcul contradictoires parmi lesquels il faut choisir le bon en fonction de critères arbitraires tenant à un prétendu bon – sens.
Borel, hélas, n'est pas de ceux qui posent les bonnes questions (Pourquoi y a t – il 2 façons d'évaluer la probabilité ?) . Il est de ceux qui donnent les bonnes réponses (Moi, Borel, élu 12 années de suite à la députation, ministre de la marine pendant quelques mois, titulaire de la chaire de probabilités à la faculté de Paris, académicien, auteur de nombreuses monographies et lecteur de quelques unes, je vous dis que la bonne façon de procéder est la suivante …).
je pense pouvoir affirmer, au nom des mathématiques dont je ne suis, pourtant qu'un modeste serviteur, qu'Emile Borel démontre dans son ouvrage sur le bridge qu'il était au moment où il l'a écrit un piètre mathématicien, galvaudant l'art qu'il prétend professer de façon hallucinante.
C'était un piètre mathématicien mais c'était un chaud laudateur de la loi de Bayes. Laissons lui le soin de nous la présenter à travers un exemple tiré de son livre.

Le problème étudié par Borel est le suivant :
On dispose de 6 cartes : RV d'une couleur (♥) et 2, 3, 4, 5 d'une autre couleur (♠).
On les distribue de façon aléatoire : 3 à Est – 3 à Ouest
La probabilité de trouver RV rassemblés dans une même main est **40%**.
La probabilité de trouver le R dans une main et le V dans l'autre est **60%**.
Le déclarant joue ♠, Est – Ouest fournissent. Les probabilités sont – elles modifiées ?
Borel examine successivement 3 hypothèses :
1 Est et Ouest jettent indifféremment leurs piques, au hasard
2 Est et Ouest jettent toujours la plus faible carte qu'ils possèdent
3 Est et Ouest jettent toujours la plus faible carte, sauf si leur deux plus basses cartes se suivent : dans ce cas ils jettent indifféremment l'une ou l'autre.

Cas 1

Est a joué le ♠2 et Ouest le ♠3. Ces cartes sont aléatoires.

Du point de vue des mains possibles Est ne pouvait avoir en début de coup que
245 24V 24R 25V 25R 2**RV**

Donc la probabilité pour qu'il ait RV est passée de **20%** à 1/6 soit **16,7%.**

Du point de vue des fournitures possibles, laissons le micro à Borel :

« La faute de raisonnement (de l'évaluation précédente) provient de ce qu'on tient seulement compte de la probabilité d'entrée en jeu de la cause : Est recevra RV2, 5 fois sur 100. On oublie de tenir compte de la probabilité que, la cause étant entrée en jeu, c'est-à-dire Est ayant reçu RV2, Est et Ouest jouent tous deux comme ils l'ont fait. Voici maintenant le raisonnement correct qui consiste à appliquer la formule de Bayes…»

Et Borel nous explique que si Est a RV2 la probabilité pour qu'il joue le 2 est 1, tandis que la probabilité pour qu'Ouest joue le 3 est 1/3 puisqu'il a 3 petites cartes.

Si on passe en revue de la même façon les 6 mains possibles pour Est et qu'on s'intéresse à toutes les possibilités de fournitures, on verra que sur les cas où le 2 et le 3 sont fournis, la fréquence de RV en Est sera 1/5 soit **20%** c'est-à-dire exactement ce qu'elle était au début du coup.

Cas 2

Est et Ouest jouent leur plus basse carte.

Borel étudie les cas les plus intéressants et nous donne les probabilités suivantes :

Carte jouée par ….		RV en E	R en E	V en E	
Est	**Ouest**		**V en O**	**R en O**	**RV en O**
2	3	16,7%	33,3%	33,3%	16,7%
2	4	0	33,3%	33,3%	33,3%
2	5	0	0	0	100%

Cette fois, la hauteur de la carte jouée par Ouest nous permet de situer de 0 à 2 cartes en Est et en reconstituant **les mains possibles**, on trouve les résultats donnés par Borel. Par exemple, si Ouest fournit le 5 , comme il n'a pas de carte plus petite, on est certain que ce 5 provient de RV5. Quand le 2 et le 3 sont fournis on retrouve les probabilités basées sur les mains possibles.

Cas 3

Si les plus basses cartes se suivent, on fournit au hasard, sinon, on fournit la plus petite.

Borel détaille les cas suivants :

Carte jouée par ….		RV en E	R en E	V en E	
Est	**Ouest**		**V en O**	**R en O**	**RV en O**
2	3	7,7%	34,6%	34,6%	23,1%
2	4	14,3%	32,1%	32,1%	21,4%
2	5	28,6%	21,4%	21,4%	28,6%
3	4	0%	25%	25%	50%
3	5	0%	30%	30%	40%
4	5	0%	0%	0%	100%

Borel démontre ces résultats en mâtinant probabilité de situation et loi de Bayes.
Nous vous épargnerons le détail de ce calcul qui ne revêt pas un grand intérêt.

À une autre occasion Borel précise :

« Les déclarations, d'abord, l'entame et le jeu de la carte ensuite, nous fourniront des renseignements de plus en plus précis desquels nous tiendront compte en éliminant les hypothèses incompatibles avec ce que nous avons appris ; mais qui avaient dû être envisagées comme possibles au début, dans les calculs faits avant la donne. Nous aurons aussi à tenir compte de la psychologie des joueurs, c'est à dire de la probabilité des causes. Nous nous demanderons, en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué. Et l'application de la formule de Bayes nous permettra enfin de remonter à la véritable probabilité à posteriori : celle que l'effet observé soit bien du à la cause. »

Nous allons maintenant nous borner à examiner l'expérience que Borel met en œuvre dans le cas 1 démontrer qu'elle révèle de nombreuses contradictions sur le plan logique, ensuite, nous verrons en quoi il est impropre d'invoquer une prétendue loi de Bayes pour résoudre un problème de bridge.

Imaginions que nous chargions un ordinateur de simuler l'expérience sur laquelle s'appuie Borel

1 un générateur aléatoire distribue les 6 cartes 3 par 3 aux deux joueurs.

2 un programme de tri ne retient que les donnes où le ♠2 se trouve en Est et le ♠3 en Ouest.
Pourquoi ce filtrage : simplement pour suivre la recommandation que Borel exprime par la phrase : « Nous nous demanderons, en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué.» il est donc indispensable de donner le 2 à Est et le 3 à Ouest. L'ordinateur doit donner à Est les mains suivantes : 245 24V 24R 25V 25R 2RV.
Le programme de tri transmet ensuite les donnes aux programmes chargés d'évaluer la probabilité.

3a **Le programme qui fonctionne dans le cadre du référentiel des mains possibles** compte les donnes qu'on lui passe et parmi elles, la proportion de mains où Est a RV .
Résultat 16,7%.
Quand Est a le 2 et Ouest a le 3 , la probabilité qu'Est ait RV est 16,7%.

3b **Le programme BAYES** fait fournir aléatoirement à Est et à Ouest un petit pique
● Si il ne s'agit pas du ♠2 et du ♠3, il demande une autre donne au programme de tri
● Si il s'agit du ♠2 et du ♠3, il valide la donne et compte parmi les donnes validées la proportion de celles où Est a RV :
Résultat 20%
Quand Est joue le 2 et Ouest joue le 3 en fournissant leurs petites cartes au hasard, la probabilité qu'Est ait RV est 20%.

Ce programme fait exactement ce que vous faites quand vous donnez à Est 245 24V 24R 25V 25R 2RV et que vous lui faites fournir le 2 une fois sur trois avec la première combinaison, le 2 une fois sur deux avec les 4 combinaisons suivantes et le 2 à tous les coups avec la dernière combinaison.
La présence du 2 est obligatoire en Est pour qu'il soit fourni avec ces fréquences. Quand le programme de tri donne à Est 245, le 2 est fourni une fois sur trois, quand il lui donne 24V il est fourni une fois sur deux, etc. Si le 2 et le 3 pouvait être situés n'importe où, Est devrait fournir aléatoirement avec par exemple 45V et le 2 ne serait fourni qu'une fois sur quatre, comme les autres petites cartes, alors qu'il doit être fourni au moins une fois sur trois. Par ailleurs nous savons de façon certaine que ce 2 est en Est et comme les probabilités ont en charge de mesurer le possible, elles opposeraient une fin de non recevoir à une expérience qui situerait le 2 en Ouest et prétendrait évaluer une fréquence dans notre donne.
Les recommandations de Borel sont donc appliquées, la compatibilité avec notre donne est apparemment respectée, les résultats donnés par l'ordinateur sont bien ceux que vous

espériez. Cela prouve que c'est bien dans le cadre de cette expérience que vous vous situez quand vous appliquez la loi de Bayes.
Il est temps, maintenant, d'attirer votre attention sur quelques incohérences.

1 D'habitude, quand vous évaluez la probabilité d'une hypothèse, vous l'assimilez à la fréquence des donnes vérifiant cette hypothèse dans le réservoir de donnes qui vous alimente.
Ce n'est pas un procédé recommandable, il vaut mieux vous intéresser aux scénarios qu'a pu dérouler la distribution aléatoire, mais c'est ainsi que vous procédez.
Quand vous évaluez la probabilité de la ♣**D** en Ouest avant qu'une carte ne soit jouée, vous voyez défiler en pensée toutes les mains possibles en Ouest et vous savez que la moitié de ces mains contiendra la dame. Probabilité 50%. .
Si vous apprenez que les 3 piques du flanc sont partagés 3 en Est – 0 en Ouest, vous faites défiler toutes les mains possibles en Ouest avec chicane pique et vous savez que 13 mains sur 23 contiendront la dame de trèfle. Probabilité 56%.
Sachant que le flanc se partage 5 piques, vous faites défiler toutes les mains possibles en Ouest et vous savez que la fréquence de celles qui attribuent à Ouest ♠**DV3** sera 3,4%.
Ici, cependant, vous allez faire une exception : Dans **16,7%** des donnes qui défilent devant vous, (celles que vous passe le programme de tri), **RV2 sont en Est**. Pourtant, vous allez proclamer que la probabilité de RV2 en Est est **20%**. **Pourquoi ?** Pourquoi votre conception de la probabilité change-t-elle dans cet exemple ?

2 Pour calculer une probabilité de Bayes, non seulement il faut distribuer des donnes ressemblant à la nôtre mais il faut fournir les cartes selon un processus donné. Nous avons besoin que d'autres cartes soient fournies que le 2 et le 3 pour justifier leur fréquence de fourniture. Evaluer une probabilité de Bayes dans une donne unique n'a aucun sens. Et c'est seulement quand les cartes fournies sont celles qui le sont effectivement dans notre donne qu'on valide le cas qui va permettre d'évaluer la probabilité.
D'ailleurs, ce que nous évaluons grâce à la loi de Bayes n'est pas une probabilité au sens strict : c'est une fréquence.
Notre exemple prouve à l'évidence que ce n'est pas la probabilité pour Est d'avoir RV que nous mesurons (celle là est bien égale à 16,7% dans le réservoir de donnes qui nous alimente). Ce que nous mesurons c'est la fréquence avec laquelle Est a RV quand Est a le ♠2 et Ouest le ♠3 et que ces cartes sont fournies selon un processus donné. Ce n'est pas sur l'ensemble des mains possibles que Bayes fonde son calcul mais sur l'ensemble des mains possibles au regard de l'ensemble des fournitures possibles. Un évènement est fondé sur la conjonction de la possession de cartes précises (celles qu'on localise et celles qu'on cherche) et de la fourniture de celles qu'on localise. Le référentiel des évènements dont vous mesurez la probabilité n'est plus celui des mains possibles que vous utilisiez en début de coup quand vous évaluiez vos chances avant qu'aucune carte ne soit fournie. **Avez-vous conscience d'avoir changé de probabilité, de ne pas mesurer la même chose ?** Croyez vous qu'il soit permis de comparer deux mesures quand l'objet même de votre mesure a changé ? En tous cas, l'axiomatique des probabilités vous l'interdit. Si Borel avait lu Kolmogorov, peut être s'en serait – il rendu compte et qu'il aurait compris pourquoi ses probabilités dites « psychologiques » sentaient le soufre. Il procède à un amalgame inadmissible sur le plan logique.

3 Borel nous dit bien que les probabilités calculées par la loi de Bayes sont fonction du processus de fourniture qu'on prête aux adversaires. Le cas 1 , le cas 2 , le cas 3 ne donnent pas lieu au même calcul.

Aujourd'hui, cette réserve légitime a disparu du panorama du bridge et on valide des tas de probabilités de Bayes en considérant que les adversaires fournissent de façon aléatoire. Fournir de façon aléatoire signifie qu'on tire au sort entre plusieurs cartes équivalentes. Connaissez vous beaucoup de bridgeurs qui procèdent ainsi ? Etes vous sûrs qu'ils ne fournissent pas la plus petite, la plus grosse, la carte qui trompera l'adversaire, la carte qui donnera un signal de parité ou un autre signal ?
N'est – il pas plus pertinent de considérer qu'en matière de bridge la stratégie de fourniture est **inconnue** ?
Et si elle est inconnue que devient la loi de Bayes ? Que ferez vous des 2, 3 , 4 , 5 probabilités contradictoires qu'elle vous permettra de calculer selon que vous envisagerez que sa stratégie de fourniture est la stratégie 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ?
Moi qui fournit le 2 une fois sur 2 avec 2 et 3. Me suffit il de changer d'attitude le jour où je vous rencontre et de décider de fournir toujours le 2 pour que les probabilités que vous calculez soient fausses et que j'en tire un avantage ?
Ne voyez vous pas qu'il est ridicule de faire de moi, votre adversaire, le maître de vos probabilités ?

4 Si il y a plus de RV en Est dans l'ensemble des donnes où le 2 et le 3 sont fournis (20%) que dans le réservoir de donnes où on s'alimente (16,7%), c'est que la fourniture aléatoire fonctionne comme un dispositif de filtrage particulièrement perméable aux combinaisons RV quand 2 et 3 sont fournis. Comment fonctionne ce dispositif de filtrage ?
C'est simple d'abord dites moi ce qu'aurait donné le calcul de Borel si Est avait fourni le 4 et Ouest le 5 ?
La probabilité de RV en Est serait toujours 20% non ? Et il en irait de même pour tout couple de petites cartes fournies. La probabilité de RV en Est serait toujours **20%**.
Dans l'expérience qu'utilise Borel pour justifier son calcul, quelle sera la fréquence de RV quand Est fournira le 4 et Ouest le 5 ?
0% puisque si Est a le 2 et le 4 il n'a pas RV. Et si Est fournit le 5 ? Encore **0%** .
Et si Est fournit le 2 et Ouest le 4 ou le 5 ? **16,7%.**
Le voilà donc ce fameux filtre ! (2-3) est **le seul** couple de petites cartes fournies pour lequel la fréquence de RV en Est soit 20%. Pour les autres couples, cette fréquence est soit 0% , soit 16,7%.

J'en déduis que pour justifier une loi selon laquelle quand Est et Ouest fournissent deux petites cartes de façon aléatoire, la probabilité de RV en Est sera 20% , Borel utilise une expérience truquée (bancale ?) dans laquelle cette probabilité n'est 20% que pour le seul couple utile à sa démonstration.

5 Pourquoi pour démontrer la pertinence de la loi de Bayes n'existe – t – il pas d'expérience en fréquence qui soit absolument compatible avec notre donne, tant du point de vue de la situation des cartes qui relève de la certitude que de leur fréquence de fourniture ?
Tout simplement parce que nous ne sommes pas dans un cas d'application de la loi de Bayes et qu'il n'existe pas de situation, en matière de bridge pour laquelle ce soit le cas.
Pour le comprendre examinons deux problèmes typiques de l'utilisation de la loi de Bayes extraits d'un livre de mathématiques :

- On estime qu'un conducteur sur cent conduit en état d'ivresse. Pendant une période donnée, un conducteur ivre a une chance sur cinquante de provoquer un accident. Un conducteur sobre a une chance sur 1000 de provoquer un accident. Un accident se produit, quelle est la probabilité pour que le conducteur soit ivre ?
- Dans un magasin, il y a 70% d'appareils provenant de l'usine A et 30% d'appareils provenant de l'usine B. Parmi les appareils venant de l'usine A , 20% ont un défaut. Parmi

les appareils provenant de l'usine B, 10% ont un défaut. J'achète un appareil défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'usine A ?

Voyez vous pourquoi la loi de Bayes porte le nom de « probabilité des causes » ?
L'observation de l'effet (un accident se produit, un appareil défectueux est acheté) nous donne à penser qu'il pourrait être lié à une cause (ivresse, usine qui produit plus d'appareils défectueux qu'une autre) et une information quantitative (une chance sur cinquante au lieu d'une sur mille, 20% de défauts au lieu de 10%) confirme la pertinence d'une relation de cause à effet.
Situons nous maintenant dans notre donne de bridge, Est fournit le 2 et Ouest le 3.
Pensez vous qu'il pourrait y avoir une relation de cause à effet entre la possession de RV par l'un des joueurs et la fourniture de ces deux cartes ? Ce serait le cas, si par exemple, quand RV sont en Est, les deux joueurs fournissaient plus fréquemment le 2 et le 3 que le 4 et le 5 ou une autre combinaison. Mais dans ce cas, la probabilité de RV en Est serait plus importante quand le 2 et le 3 seraient fournis que quand le 4 et le 5 seraient fournis.
Or ce n'est évidemment pas le cas, dans la mesure ou la fourniture est aléatoire et si la loi de Bayes elle-même ne confirmait pas que cette probabilité est la même on se demanderait quelles seraient les sources mystérieuses de son inspiration.
En fait l'argument qui permet aux bridgeurs d'employer la loi de Bayes est d'une autre nature.
Est fournit <u>plus fréquemment</u> une de ses petites cartes quand il a une grosse carte à côté que quand il n'en a pas. Ne peut – on y voir une relation de cause à effet ?
Si, **à condition que vous considériez que l'effet est <u>l'augmentation de la fréquence de fourniture</u> de la petite carte et non pas <u>sa fourniture</u>.**
Ce qui veut dire que pour observer l'effet, **il vous faut mesurer la fréquence de fourniture** et que donc vous allez demander à Est de fournir plusieurs fois une petite carte de façon aléatoire avec le jeu qu'il a
● Si il fournit le 2 et le 2 et le 2 et le 2… (fréquence du 2 = 1) il a RV2
● si il fournit le 2 et le 4 et le 2 et le 4 et le 2 et le 4 ….(fréquence = 1/2) il a le R ou le V avec le 2 et le 4.
● Si il fournit le 2 et le 4 et le 5 et le 2 et le 4 et le 5…. (fréquence = 1/3) il a le 2 , le 4 et le 5 .

Voilà quelle est, en matière de bridge, la seule et piètre expérience, compatible avec notre donne, qui permette de justifier l'emploi de la loi de Bayes.
Dommage qu'en matière de bridge on ne puisse pas demander aux adversaires de fournir plusieurs fois leurs petites cartes de façon aléatoire parce que cela doperait nos probabilités jusqu'à la certitude.

◄►

Une fois que nous avons démontré l'incurie de la loi de Bayes, en matière de bridge, il nous faut repérer les situations dans lesquelles les bridgeurs l'emploient, souvent à leur insu :
● Un joueur fournit et l'autre défausse. On considère que si les piques sont 3-0, et qu'Ouest fournit 3 carreaux sur les trois tours de pique, il ne faut pas prendre ces 3 carreaux en considération dans le calcul des places vacantes → faux aucun procédé mathématique ne justifie un tel résultat.
● On cherche un honneur d'une couleur et quand on apprend la distribution initiale de cette couleur on considère que même lorsque l'adversaire a joué des cartes de cette couleur la probabilité reste initiale.

Si les trèfles étaient initialement 4-3, on considère que la probabilité de trouver la dame dans le flanc qui en avait 4 est 4-7 même quand les trèfles sont devenus 3-3 → faux aucun procédé mathématique ne justifie un tel résultat. Dans un partage 3-3 la probabilité est 50%.

● Le moindre choix. Nous manipulons ♠A10984 pour ♠R765 . Nous tirons le roi le valet apparaît en 4^e position. Le moindre choix recommande de faire l'impasse. Dans notre donne, la situation de la dame est déjà fixée par le sort et elle ne changera pas quelle que soit la façon dont no 4 fournit avec des cartes équivalentes. Si le procédé de distribution aléatoire pouvait situer plus de DV en 4^e position que de V secs, il n'a pas changé d'avis parce que No4 pouvait jouer le valet de valet - dame une fois sur deux. Ce pauvre procédé de distribution aléatoire ignorait que No 4 pouvait jouer le valet une fois sur deux et il n'a pas pensé à diviser par 2 les DV en fonction de ce fait. Et comme toutes les probabilités au bridge découlent du processus de distribution aléatoire, c'est à ses conclusions qu'il faut faire confiance et non pas aux pitreries gratuites de no 4. Il vous faut réagir comme si les 4 cartes du flanc étaient D432 et tirer en tête.

Conclusion

En fait, notre problème est le suivant :
Situons nous d'abord en début de coup, après que les 4 jeux aient été distribués de façon aléatoire mais avant qu'aucune carte ne soit jouée.

Avant que le jeu de la carte ne débute.

Si l'on nous demande d'évaluer la probabilité pour que tel joueur (par exemple Ouest) possède telle carte (par exemple la **♣D**) , connaissant les 13 cartes de nord, et les 13 cartes de Sud et sachant en outre qu'Est a le ♠2 le **♠3** et le **♠4** et Ouest le **♦2** le **♦3** et le **♦4** , comment allons nous procéder?
C'est simple, nous connaissons l'emplacement de 32 cartes, seules 20 sont inconnues, mais comme personne n'a joué, personne n'a pu démontrer une brillante aptitude à choisir aléatoirement une carte parmi plusieurs cartes équivalentes, notre marge de manœuvre est réduite : nous allons caractériser notre probabilité comme celle qu'avait la distribution aléatoire d'attribuer la **♣D** à Ouest, sachant que l'ensemble des possibles est restreint par ce que nous savons déjà de la donne, à savoir l'emplacement des 32 cartes supposées connues dans l'énoncé du problème.
Nous pouvons raisonner de deux façons possibles :

● Nous pouvons imaginer la distribution aléatoire faisant son œuvre avec les 52 cartes du paquet. Parmi toutes les possibilités qui lui étaient offertes, un nombre **P** de donnes situaient en Nord et Sud les 13 cartes que nous leur connaissons, et en Est et Ouest, les 3 cartes que nous leur connaissons. Parmi ces **P** donnes, **N** situaient la **♣D** en Ouest. La probabilité pour que la distribution aléatoire ait fait les choses comme le prévoit notre hypothèse est donc **N / P**.

● Nous pouvons aussi imaginer le processus de brassage aléatoire situant 10 des 20 cartes encore inconnues dans la main d'Ouest pour compléter les 3 que nous lui connaissons déjà. Il avait **P** façons de procéder et parmi ces **P** façons **N** situaient la **♣D** en Ouest. La probabilité cherchée est donc **N / P**.

En fait ces deux procédés sont équivalents et débouchent sur les mêmes conclusions : la probabilité de la **♣D** en ouest est **50%**.
Plus généralement, dés lors que nous connaissons autant de cartes en Est qu'en Ouest, il n'y a aucune raison pour que la distribution aléatoire ait favorisé un flanc ou l'autre dans la

possession d'une carte inconnue. Par contre, dés qu'il y a plus de places vacantes dans un jeu que dans l'autre, il devient favori pour la possession d'une carte inconnue.
Jusque là, nous devrions donc être d'accord pour dire : « dés lors que la distribution aléatoire a attribué aux joueurs les cartes que nous leur connaissons, la probabilité pour qu'elle ait donné la ♣**D** à Ouest est **50%**. »

Au cours du jeu de la carte.

Bien, maintenant reprenons la donne au début, et procédons au jeu de la carte, L'atout est pique, Est a entamé atout. La première levée dévoile une chicane à pique en Ouest et 3 piques en Est.
● **À ce stade**, nous connaissons 3 cartes en Est et une seule en ouest : la ♣**D** est plus probable en Ouest.
● **Au bout de 3 levées**, nous connaissons 3 piques en Est et 3 carreaux en Ouest. Notre découverte de la main longue à pique n'a pas progressé mais par contre, nous avons bouché deux trous dans la main courte à pique.
Nous savons exactement la même chose que précédemment, quand nous essayions d'évaluer la probabilité avant qu'aucune carte ne soit jouée mais nous ne l'avons pas appris par les mêmes voies ni au même instant. Pourquoi la façon dont nous prenons connaissance des distributions partielles modifierait – elle la probabilité pour que le brassage aléatoire ait situé les cartes de telle façon ? N'est ce pas le brassage aléatoire et lui seul qui est responsable de la distribution que nous avons rencontrée ? La probabilité que nous calculions auparavant, avant que le jeu de la carte ne débute, n'aurait pas été différente si nous avions su que les flancs se partageaient 3 piques en tout. Si nous l'avions su, nous aurions dit au début du coup que 50% était la probabilité pour qu'Ouest ait la ♣**D** sachant qu'il avait une chicane pique et les 3 carreaux qu'on lui connaissait. En fait que les flancs se partagent 3 ou 8 piques ne change rien au procédé de calcul initial et il donne toujours le même résultat. Qu'est – ce qui a changé maintenant que le jeu de la carte nous a appris qu'Ouest avait une chicane à pique et les 3 carreaux en question ? Le fait que ce soit le jeu de la carte qui nous l'ait appris et pas un autre processus change – t – il quelque chose aux probabilités ?

Le nœud du problème

C'est le nœud du problème. Donner les cartes est un acte qui a très peu de chose à voir avec le bridge. C'est un acte qui revient à distribuer mécaniquement de façon équitable et aléatoire 52 cartes d'un paquet à 4 joueurs sans préjuger de l'usage qu'on va en faire.
Mais il ne fait aucun doute que **toutes** les probabilités au bridge sont liées à la nature de cet acte car c'est lui, et lui seul, qui parmi toutes les mains possibles détermine les proportions de celles qui possèdent une caractéristique donnée, c'est donc lui qui en fin de compte détermine les probabilités.
Pour les théoriciens du bridge, il semble que ce ne soit pas vrai (ou, paradoxalement, que ce ne soit vrai qu'au début du coup) et qu'il faille voir les distributions à travers le prisme du jeu de la carte c'est-à-dire cesser de s'intéresser à la façon dont la distribution aléatoire a pu faire son œuvre , comme nous le faisions au début du coup, et porter notre attention sur la façon dont jouent nos adversaires (en supposant que nous la connaissons, alors que ce n'est pas vrai le plus souvent).
Or, le jeu de la carte ou plutôt les règles du bridge n'ont un impact sur les probabilités que quand elles dévoilent avec certitude la localisation de certaines cartes. Cela exclut toute interférence entre un mode de fourniture de l'adversaire, (qui ne joue que sur la durée, qui ne dérive d'aucune règle mis à part l'obligation de fournir et qu'on ne connaît d'ailleurs pas) et la probabilité.

Prenons le moindre choix : les adversaires se partagent 4 piques : ♠DV43 , tout le monde convient que si l'on compare au début du coup leurs proportions respectives, on trouve environ 54% de DV secs pour 46% de V secs. Pourtant, quand on va voir apparaître un valet, au premier tour de pique, on va en déduire qu'il est plus souvent sec qu'accompagné de la dame. Pourquoi ? Parce que celui qui a DV fournit le valet une fois sur deux (admettons que ce soit vrai) et que, dés lors, d'après les théoriciens du bridge, il convient de comparer 27% de DV fournissant le V à 46% de V secs. Cela signifie qu'on superpose bien à la vision « géographique » des possibles résultant de la distribution un prisme découlant du mode de fourniture et que c'est à travers ce prisme qu'on regarde la distribution. La géographie n'est plus seule en cause, on nous impose une vision en fréquence faisant intervenir le temps (« une fois sur deux »): on parcourt la totalité de l'espace géographique mais quand on survole les régions contenant DV, la fourniture aléatoire crée l'illusion qu'on a rencontré, au cours de notre périple, plus de V provenant de V sec que de DV secs. Ce n'est d'ailleurs pas qu'une illusion, c'est une réalité dans l'expérience qui nous est imposée.
Pour vous faire comprendre, ce que cette vision de la probabilité a de pervers, il suffit d'imaginer la situation suivante : vous vous rendez sur une île où l'on trouve **46** valets célibataires, **46** dames célibataires et **54** valets mariés à **54** dames. Donc en tout, on trouve sur cette île **100** valets dont **54** sont mariés et **46** célibataires. Quelle est la probabilité pour un valet d'être marié ? **54%** je suppose. Vous rencontrez un valet au hasard, quelle est sa probabilité d'être marié ? **54%** sans aucun doute.
En supposant que ce valet puisse provenir d'un couple et que dans ce cas le sort aurait pu vous faire rencontrer à sa place, une fois sur deux, une dame, est ce que cela change la probabilité de ce valet d'être marié ?
La probabilité de votre valet d'être marié tient – elle à <u>la compilation de l'état civil de l'île</u> (tant d'hommes mariés parmi les hommes) où à la fréquence avec laquelle vous rencontreriez les valets mariés si le sort vous les faisait rencontrer selon un processus donné ?
Et bien au bridge c'est la même chose, déterminer une probabilité sur la fréquence de fourniture du valet, c'est contester que c'est le hasard **de cette donne**, de cette distribution, qui nous a mis en présence de ce valet et non pas un processus mécanique basé sur le long terme qui d'ailleurs n'existe que dans votre imagination. D'une part parce qu'il n'est pas du tout sûr que votre adversaire fournisse le valet une fois sur deux avec DV secs, d'autre part parce que dans toute votre vie de bridgeur, vous ne jouerez pas cette donne assez souvent contre des adversaires adoptant un procédé de fourniture donné pour que votre stratégie ait un sens, pour que « une fois sur deux » ait un sens.
Si l'on avait comparé, au début du coup, la probabilité du **V** sec à celle de **DV** secs on aurait trouvé que celle de **DV** était plus importante, de la même façon que, lorsque l'adversaire possède **♠D432** et qu'on cherche la dame, on estime avec juste raison que la probabilité de **♠32** secs chez le joueur qui les a fourni au 2^{e} tour de la couleur était plus importante que celle de **♠D32.** Qu'un joueur puisse fournir le **V** ou la **D** avec 2 cartes équivalentes peut –il changer quelque chose au fait que quand le choix est entre l'une de ces deux combinaisons, on a plus de possibilités d'avoir **DV** secs que **V** sec ? Si oui comment allez vous décliner ce principe au niveau du joueur qui a fourni **3** et **2** aux premiers tours de la couleur ?
Où nous conduit un tel raisonnement ? Supposons que les 4 cartes aient été **♠5432** et que le premier tour de la couleur voit les adversaires fournir le **2** en Est et le **4** en Ouest. Au second tour Est fournit le **3**. Le **4** était – il sec en Ouest ou accompagné du **5** ? S'il était sec, l'adversaire était obligé de le fournir, tandis que s'il n'était pas sec, il pouvait fournir le **5**. Donc ce **4** est plus souvent sec.
Supposons que les 3 premières cartes fournies, soient le **2** , le **4** et le **5** ou n'importe quelles petites cartes , vous allez tirer les mêmes conclusions. La première carte fournie par Ouest est plus souvent sèche qu'accompagnée.

Vous en déduisez que 4 petits piques, quels qu'ils soient sont plus souvent distribués 3 en Est – 1 en Ouest que 2-2 alors que les statistiques initiales nous disent le contraire. Comment expliquez vous cette contradiction ?

En bref, vous pouvez estimer vos chances comme vous le voulez, oublier que vous vous situez dans une donne de bridge parmi des milliards et imaginer que vous mettez à l'épreuve une martingale dans une série d'épreuves fonctionnant selon des règles données. Mais une chose est sûre. C'est que vous n'avez pas le droit d'appeler « probabilité » le chiffre que vous calculez pour évaluer vos chances par un processus découlant d'un emploi (au demeurant contestable) de la loi de Bayes, car nous seulement il déroge à la définition élémentaire de ce mot mais il contredit (je dis bien « il contredit ») le sens que vous lui donniez quand vous l'évaluiez, en début de coup, avant qu'aucune carte ne soit jouée.