Idées fausses, idées justes

Cartes non significatives et cartes significatives?

Nord entame du ♥2, une carte supposée ne véhiculer aucun renseignement sur le contenu de la couleur.

Nord	**♥2**												
Sud													

Et je me demande si à ce stade la probabilité de la ♣D en Nord a changé.

D'après un éminent mathématicien, Émile Borel, (dans Théorie mathématique du bridge- 1940), **il serait absurde de conclure du fait que Nord entame une carte – Il est bien obligé de le faire ! – qu'il a moins de chance qu'Est d'avoir la ♣D**. C'est ce qu'il appelle une "entame incolore", par opposition à l'entame d'un honneur comme le roi qui nous apprendrait que la dame est dans la même main. C'est aussi ce que Bill appelle une carte non - significative.

Je n'arrive pas à la cheville de Borel comme mathématicien et pourtant c'est avec l'aide des mathématiques que je vais, assez simplement, démontrer qu'il a tort.

Supposons que les 25 cartes que possèdent encore les flancs en main soient, pour simplifier,

♠ 432 ♥ 9876543 ♦ 8765432 ♣ D8765432

Si la connaissance du ♥2 en Nord ne modifie pas la probabilité de la ♣D, (il est bien obligé d'entamer) elle ne modifie pas non plus la probabilité de n'importe laquelle des 24 autres cartes de cet ensemble d'être en Nord ou en Sud et l'on doit évaluer cette probabilité à 50%.

Si nous considérons les 13 cartes de Sud, dont il n'a pas encore fourni une seule,

Sud													

la probabilité qu'elles contiennent la ♣D est donc (d'après Borel) 50% ou encore $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Si maintenant nous focalisons notre attention sur une carte particulière de Sud, par exemple la 3e en partant de la gauche.

Sud													

La probabilité de cette carte d'être la ♣D est $\frac{1}{2}$ divisé par 13 soit $\frac{1}{26}$.

C'est aussi la probabilité pour que cette carte soit le ♠2 , le ♥3 , le ♦8 ou n'importe quelle carte encore non localisée.

Donc la probabilité pour que cette carte soit la ♣D ou le ♠2 est $\frac{1}{26}+\frac{1}{26}=\frac{2}{26}$. (Voir la définition de la probabilité)

La probabilité pour que cette carte soit la ♣D ou le ♠2 ou le ♥3 est $\frac{1}{26}+\frac{1}{26}+\frac{1}{26}=\frac{3}{26}$

Et en étendant le processus aux 25 cartes non localisées on trouve que

la probabilité pour que cette carte bleue soit l'une des cartes que l'on n'a pas encore localisées est $\mathbf{\frac{25}{26}}$.

<u>Cette probabilité n'est pas 1, donc ce n'est pas une certitude que cette carte soit l'une des cartes que les NS ont encore en main</u>. Qu'est ce que vous en pensez?

Bien sûr que cette carte est l'une des cartes que NS ont encore en main !

Et comme notre raisonnement ne peut être faux, puisque nous n'avons fait qu'utiliser les propriétés élémentaires de la probabilité, que devons nous en déduire?

Que les prémisses sont fausses, autrement dit que la probabilité de la ♣D en Sud n'est pas $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Si l'on appelle **p** la probabilité pour que Sud ait en main la ♣D, pour que la carte bleue soit une des cartes que NS ont encore en main il faudrait que $\frac{25p}{13}=1$, autrement dit que $p=\frac{13}{25}$, autrement dit que la probabilité de la ♣D en Nord soit $\mathbf{\frac{12}{25}}$.

C'est exactement la probabilité que l'on trouverait par le procédé des places vacantes ou par le décompte des mains possibles. Vous ne trouvez pas ça curieux?

Mais le pire dans tout ça est que Borel lui-même définit, un peu plus loin, la probabilité de situation d'une carte en Nord comme le rapport $\mathbf{\frac{n}{n+s}}$ où **n** est le nombre de cartes non localisées que Nord a encore en main et **s** le nombre de cartes non localisées que Sud a encore en main et ce sans faire de distinction entre cartes significatives ou non - significatives.

Alors mon petit Emile, on faisait un gros dodo le jour où on a pondu cette connerie sur les entames incolores?

On aurait pu faire ce test que nous appellerons "test de la probabilité totale" dans n'importe quelle situation où vous calculez une probabilité par le procédé des places vacantes en ne tenant pas compte de certaines cartes que vous considérerez comme non –significatives et le résultat aurait été le même. Nous en déduisons donc que:

Quand on calcule une probabilité au bridge il n'y a pas de carte non – significative.

Du reste, votre but n'est – il pas de percer les mystères des cartes qui restent encore en main dans les flancs?

Lorsque le nombre de ces cartes diminue, les hypothèses que vous pouvez faire sur ces mains ne sont elles pas moins nombreuses? Les distributions régulières des résidus ne deviennent – elles pas de plus en plus fréquentes au détriment des distributions les plus excentrées? Les cartes recherchées n'ont – elles pas de moins en moins de places vacantes où se cacher?

Et si vous considérez que c'est le cas, n'est – il pas normal que lorsque l'un des deux joueurs se départit d'un treizième de son jeu initial la probabilité subisse des bouleversements importants.

Dans une donne banale où aucune dissymétrie n'est dévoilée, considérez ces chiffres:
Au début **10.400.600** mains possibles en nord
Immédiatement après l'entame : une seule carte jouée et plus que **5.200.300** mains possibles en nord.
Après la 4e levée : **48.620** mains possibles en nord.
Après la 8e levée: **252** mains possibles en nord.
Pensez-vous que cette hécatombe est sans conséquence sur la probabilité et qu'à la 8e levée il est encore logique de baser l'évaluation de vos chances sur les mains possibles à la 4e, quand ce n'est pas au début du coup?

Tirer des donnes, oui mais avec quel protocole ? Quelles contraintes ?

Quand nous en sommes à ce stade

Nord	**♥2**												
Sud													

la vision en fréquence commence à vous jouer des tours car vous vous dites que si la probabilité de la ♣D est sa fréquence dans l'ensemble des donnes possibles que vous voyez défiler en pensée, vous devriez la trouver en Nord 50 fois sur 100 et non pas 48 fois sur 100 comme le suggère le calcul qui donne la probabilité de la ♣D en Nord à $\frac{12}{25}$.
Mais êtes-vous sûr que l'ensemble des donnes que vous voyez défiler, autrement dit l'ensemble des donnes qu'on obtient par brassage et distribution des 26 cartes des flancs, est l'ensemble des donnes **possibles** ?
Dans votre ensemble de donnes, le ♥2 (carte prétendument non – significative) se trouve une fois en Nord, une fois en Sud. Diriez-vous qu'une donne situant le ♥2 en Sud, alors que nous l'avons vu en Nord est une donne possible ?
Pour le savoir, il est là aussi inutile de polémiquer pendant des heures. Il suffit de se tourner, une fois encore vers les probabilités élémentaires.

Que vous considériez que la probabilité de situation d'une carte en nord est la fréquence avec laquelle cette carte se trouve en nord dans les donnes possibles ou dans les mains possibles n'a pas d'importance.
Dans la mesure où c'est une certitude que ce ♥2 se trouve en Nord, il faut bien en déduire que la probabilité qu'il soit situé en Nord est 1. Et cela implique que la fréquence du ♥2 en Nord dans les donnes ou les mains possibles est 1.
Autrement dit ce ♥2 doit se trouver en Nord dans toutes les mains ou toutes les donnes qui constituent votre univers.
Seule la probabilité de l'univers est 1 et cela implique que l'univers est constitué de donnes ou de mains qui situent toutes ce ♥2 en Nord.
Que devons-nous en déduire? Nous devons en déduire que pour simuler la probabilité cherchée, c'est dans l'ensemble des donnes localisant le ♥2 en Nord que nous devons mesurer la fréquence de la ♣D et dans cet ensemble, nous trouverons qu'elle se trouve en Nord dans 48% des donnes et en Sud dans 52% des donnes.

Si nous devons simuler une probabilité dans une donne par une expérience en fréquence, il faut que dans toutes les donnes, les cartes vues (ou plutôt localisées) soient exactement comme dans la nôtre.

On ne peut prétendre déduire une probabilité dans une donne de tirages ne respectant pas ce critère.

La main de la chicane à pique

Je joue 4♠ en Ouest, Nord entame cœur, je prends, j'extrais les atouts adverses en 3 tours, ils sont 3 en sud, 0 en Nord. Sur les 3 tours d'atout Nord fournit 3 petits carreaux. La situation est la suivante :

Nord	**♥2**	**♦2**	**♦3**	**♦4**									
Sud	**♥3**	**♠2**	**♠3**	**♠4**									

Quelle est la probabilité de la ♣D en Nord ?
Je prétends que cette probabilité est 50%.

Roudinesco l'évalue à $\frac{13}{23}$ ce qui revient à se situer dans l'ensemble initial des mains où Nord a une chicane pique.
Rubens pense qu'il faut corriger cette probabilité du fait qu'on sait que les cœurs ne sont pas 7-0 ce qui revient à se situer dans l'ensemble des mains où Nord a chicane pique et où Nord a le ♥2 et Sud le ♥3. Probabilité $\frac{12}{21}$.
Je note que Rubens et Roudinesco ne sont même pas foutus de donner la même probabilité dans cette situation.

Je fais le compte des mains possibles en Nord qui à ce stade (et aux stade initial) contenaient les cartes vues C_{18}^{9}= 48620. Parmi ces mains C_{17}^{8}=24310 contiennent la D.
Je fais le rapport des 2 et je trouve à ce stade (et au stade initial dans l'ensemble des mains qui contenaient les cartes vues à la table) que la probabilité de la ♣D en Nord est 50%. Donc au début du coup la probabilité pour que Nord ait la ♣D dans une donne où il a 0 piques, ♦324 et ♥ 2 et Sud les 3 piques, et le ♥3 était 50%. Cette probabilité a-t-elle quelque chose à voir avec la nôtre ?
Je vous ai **démontré** que pour simuler la probabilité dans une donne il fallait que dans toutes les donnes les cartes connues soient comme dans la nôtre (♥2 + ♦234 en Nord, ♥3 + ♠234 en Sud) or ce n'est pas ce que font Roudinesco et Rubens et dans l'ensemble de donnes "orthodoxe", la ♣D est en Nord une fois sur 2.
Je vous ai **démontré** qu'au bridge il n'y a pas de cartes non significatives quand on applique la loi des places vacantes sinon le calcul ne passe pas le test de la probabilité totale. Ici si vous calculez la probabilité des cartes encore inconnues dans les dispositifs de Rubens ou de Roudinesco, vous verrez que leur probabilité est fausse parce qu'elle ne passe pas le test de la probabilité totale.
Si par contre vous faites le même test avec une probabilité de 50% le calcul montrera qu'elle est cohérente.
Si vous savez ce que **démontrer** veut dire quel autre argument dois- je inventer pour convaincre votre bons sens qu'il se trompe ? Einstein définissait le bon sens comme "un ramassis de préjugés acquis avant l'âge de 18 ans", vous devriez méditer cette opinion.

Les trèfles étaient 4 en Nord , 3 en Sud.

Les probabilités vues comme la fréquence d'un évènement dans des donnes influencées par un mode de fourniture.

Voici un exemple d'utilisation de ce procédé que certains "matheux" amalgament à la loi de Bayes.
Les 7 trèfles de NS sont ♣D765432.

Je sais que les trèfles, au début de la donne étaient 4 en nord et 3 en sud.

La probabilité de la ♣D en Nord est donc $\frac{4}{7}$ au début de la donne.

Et la probabilité d'un non trèfle en Nord est $\frac{9}{19}$

À la 6e levée Nord défausse un trèfle. La situation est par exemple la suivante

Nord	♥2	♥3	♠7	♦3	♦7	♣2							
Sud	♥4	♥5	♠A	♦V	♦2	♦3							

Nord a défaussé un trèfle sur un carreau du déclarant.

Quelle est, à ce stade, la probabilité de la ♣D en Nord ?

Tous les joueurs savent que lorsqu'on joue de nombreuses donnes où les trèfles sont 4-3, la ♣D se trouvera dans la main de celui qui en a 4, 4 fois sur 7. Donc pour eux, il est impossible que la probabilité ne confirme pas l'attitude que le bon sens nous dicte. (Peut être leur bon sens oublie-t-il que ♣3, ♣4,…♣7 sont aussi en Nord 4 fois sur 7?)
Pourtant, lorsqu'on calcule la probabilité de la ♣D en nord selon les places vacantes ou selon le décompte des mains possibles on trouve que cette probabilité est $\frac{1}{2}$ à partir du moment où les trèfles sont devenus 3-3.
Il va donc falloir magouiller un peu pour que la probabilité rende les mêmes conclusions que notre bon sens et c'est là qu'intervient la loi de Bayes. On va raisonner selon l'exemple donné par l'illustre Émile Borel.

♣2345	$\frac{1}{4}$	♣234D	$\frac{1}{3}$
♣2346	$\frac{1}{4}$	♣235D	$\frac{1}{3}$
♣2347	$\frac{1}{4}$	♣236D	$\frac{1}{3}$
♣2356	$\frac{1}{4}$	♣237D	$\frac{1}{3}$
♣2357	$\frac{1}{4}$	♣245D	$\frac{1}{3}$
♣2367	$\frac{1}{4}$	♣246D	$\frac{1}{3}$
♣2456	$\frac{1}{4}$	♣247D	$\frac{1}{3}$
♣2457	$\frac{1}{4}$	♣256D	$\frac{1}{3}$
♣2467	$\frac{1}{4}$	♣257D	$\frac{1}{3}$
♣2567	$\frac{1}{4}$	♣267D	$\frac{1}{3}$

On voit ici toutes les distributions possibles des trèfles en Nord quand le 2 a été fourni. Il y en a 20.
La colonne suivante indique la fréquence de fourniture du 2 selon le contenu des trèfles, lorsqu'on les fournit aléatoirement sur de nombreuses donnes.
Les adeptes de ce procédé d'évaluation de la probabilité nous disent.

Certes la probabilité d'avoir la ♣D en Nord est $\frac{1}{2}$

Mais, ajoutent-ils, si Nord a la dame la probabilité pour qu'il fournisse le 2 est $\frac{1}{3}$, tandis qu'elle est de $\frac{1}{4}$ s'il n'a pas la dame.

Donc la probabilité pour nord d'avoir la dame et de fournir le 2 est $\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$

Mais la probabilité pour nord de ne pas avoir la dame et de fournir le 2 est $\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$.

Ce qui signifie que si on donne a une machine les mains possibles, en proportion de leur probabilité de présence respective et que la machine fournit les petits trèfles de façon aléatoire, sur 24 donnes elle aura fourni le 2 ,7 fois, il proviendra 4 fois de mains avec la dame et 3 fois de mains sans la dame.
On en déduit que dans l'univers des donnes où le ♣2 est fourni, la probabilité de la ♣D dans la main qui en avait 4 sur 7 est $\frac{4}{7}$ même et s'il reste 3 trèfles dans chaque main.

Cette façon de procéder devrait, pourtant chatouiller votre bon sens et attirer plusieurs remarques :

1) Les probabilités au bridge sont déterminées en amont de la donne par le caractère aléatoire de la distribution. C'est la distribution aléatoire qui garantit au début de la donne l'équiprobabilité de toute carte dans chacune des 4 mains, puis quand nous découvrons notre main l'équiprobabilité de chacune des 39 autres cartes dans chaque main inconnue, puis quand nous savons que Nord a 4 trèfles, l'équiprobabilité de chaque trèfle parmi ces 4 cartes, puis quand Nord défausse le 2 de trèfle l'équiprobabilité de chaque trèfle parmi les 3 qui lui reste. Que Nord défausse un carton ou un autre parmi 2 cartons équivalents ne peut pas avoir un impact sur la probabilité puisque la distribution aléatoire a accompli son œuvre et décidé de la situation de la dame de trèfle longtemps avant cette défausse.

2) Votre univers est un univers de donnes où l'on fournit des petites cartes, selon un procédé que vous avez choisi arbitrairement, à partir de toutes les mains possibles contenant le 2. Et si on fournit le 2 une fois sur 3 ou une fois sur 4, il faut bien que quelquefois on fournisse le 3, le 4 , le, 5, le 6 ou le 7. Or dans une donne où, par exemple, le 3 est fourni, **quelle est la probabilité du 2 en Nord ?** <u>**Cette probabilité est 1 ou 100%**</u> puisque le 2 est en Nord dans toutes les mains à partir desquelles on fournit. Le bridge est – il un jeu où quand le 3 est fourni vous pouvez en déduire que la probabilité du 2 en Nord est 1 ? Non évidemment. À partir de là, il devient clair que l'univers construit par ce procédé n'a rien à voir avec le bridge et que c'est abusivement qu'il prétend mesurer une probabilité dans notre donne.

3) Les adeptes de ce procédé de calcul débutent leur argumentaire par
"Certes la probabilité de la ♣D en Nord est 50% mais …" (C.F Borel quand il introduit ses "probabilités psychologiques")
Mais si la probabilité de la ♣D est 50% n'est-ce pas la probabilité que nous cherchons ? Pourquoi faudrait – il en chercher une autre ?

4) Par ailleurs, la probabilité qu'il calculent est basée sur l'a priori d'une fourniture aléatoire. Si comme moi ils fournissaient le plus petit trèfle ou si comme d'autres ils donnaient la parité, la probabilité calculée serait différente de $\frac{4}{7}$.
Alors à quoi sert une probabilité si elle dépend d'un comportement que l'on ne connait pas ?

5) Et enfin, si je m'intéresse à la fréquence avec laquelle on a la D et on ne fournit pas le 2 je trouve $\frac{1}{2} x \frac{2}{3} = \frac{8}{24}$ tandis que la fréquence avec laquelle on n'a pas la D et on ne fournit pas le 2 est $\frac{1}{2} x \frac{3}{4} = \frac{9}{24}$ ce qui signifie que quand on ne fournit pas le 2 la probabilité de la D en Nord est $\frac{8}{17}$ soit $\frac{56}{119}$ et quand on le fournit $\frac{68}{119}$. Essayez d'en faire bon usage !

Ces arguments devraient suffirent à vous convaincre, qu'en matière de bridge, l'utilisation de la loi de Bayes reposant sur une vision en fréquence dans un univers de donnes et non de mains, sent le soufre mais il n'est pas inintéressant de poursuivre un peu plus loin notre recherche et de nous demander pourquoi.

En matière de bridge, bâillonnons Bayes !

En fait la loi de Bayes s'applique quand on procède à un tirage aléatoire dans une population clivée selon plusieurs caractères dont on connait l'effectif (ou la fréquence) par modalité.
Par exemple, une population constituée de personnes malades ou saines, vaccinée ou non vaccinées et l'on sait que 10 personnes (10%) sont malades et vaccinées, 30 personnes (30%) malades et non vaccinées, 40 personnes (40%) saines et vaccinées et 20 personnes (20%) saines et non vaccinées.
On tire une personne au hasard : elle est malade. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit vaccinée ?
La réponse, selon Bayes, est la proportion de personnes vaccinées parmi les malades soit 10/(30+10) = 10/40 soit 25%.

Dans notre donne, si l'on construit tous les possibles une fois que le ♣2 est fourni on trouve 10 combinaisons de 3 trèfles sans la D et 10 combinaisons de 3 trèfles avec la D.
Alors comment peut-on trouver une probabilité de 4/7 au lieu de 1/2 ?
En imaginant que l'on se situe non pas dans un univers de mains mais dans un univers de donnes dont les caractères sont D en Nord / D en sud et ♣2 fourni par Nord / un autre petit trèfle fourni par nord. Dans notre donne le ♣2 est fourni et on s'interroge sur la probabilité pour que la D soit en nord quand le ♣2 est fourni.

Si je raisonnais de la même façon dans l'exemple malades / vaccinés je dirais que, quand on renouvelle souvent l'opération de tirage, si la personne tirée est x la probabilité de tirer x parmi les malades vaccinés est $\frac{1}{10}$ x 10% = 1% (puisque qu'il y a un seul x et 10 possibilités de tirages parmi les 10% de malades vaccinés). Et la probabilité de tirer x parmi les malades non vaccinés est $\frac{1}{30}$ x 30% = 1% (30 possibilités de tirage parmi les 30% de malades non vaccinés) donc si je tire x et qu'il est malade la probabilité pour qu'il soit vacciné est $\frac{1\%}{1\%+1\%}$ soit 50%. Au lieu de 25% selon Bayes.
Et Bayes ne serait pas très content de l'utilisation que vous avez fait de sa loi.
Cet exemple, où je n'ai rien fait d'autre qu'imaginer qu'on pouvait tirer d'autres personnes que x dans une série d'épreuves, comme vous avez imaginé qu'on pouvait fournir d'autres cartes que le 2 dans une série de donnes, prouve que le procédé n'est pas pertinent pour calculer une probabilité et que les seuls évènements acceptables (au sens de la probabilité) sont ceux qui constituent l'ensemble sur lequel on s'interroge et non une série d'épreuves sur cet ensemble.
En outre, si vous vous situez dans un univers où le ♣2, le ♣3 et tous les petits trèfles peuvent être fournis c'est que vous vous situez dans l'univers avant la fourniture, c'est-à-dire dans un univers où les trèfles sont encore 4-3. Et dans cet univers pas besoin de sortir de polytechnique pour trouver que la probabilité de la D dans la main qui en a 4 est 4/7.

Ajoutons que l'a priori de la fourniture aléatoire des trèfles ne tient pas la route.
Il faut dire à ce sujet que là où E Borel calculait une probabilité différente selon que le joueur fournissait ses petits trèfles au hasard, dans l'ordre ascendant ou d'une autre manière, ses héritiers actuels se sont rapidement débarrassés de cette restriction encombrante. Et on les comprend car il est assez gênant de pouvoir calculer plusieurs probabilités de localisation d'une carte. Ou plutôt aucune car en fait on ne sait pas du tout comment défaussent les adversaires.

Le moindre choix.

C'est encore un exemple de l'utilisation inopportune de la loi de Bayes.
A la 3e levée vous maniez la couleur pique où vous possédez en Nord A1086 et en Sud R975.
Vous jouez le roi de Sud et vous voyez apparaître le valet en Est, derrière A10.
Vous supposez avec quelques raisons que ce valet provient de V sec ou de DV secs.
Au 2e tour de pique, on joue le 7 de Sud, Ouest fournit le 3. Faut-il tirer l'as ou faire l'impasse à la dame ?

Est	♥2	♥3	♠V	?									
Ouest	♥4	♥5	♠2	♠3									

Les mathématiques nous disent qu'au début du coup la probabilité de V sec était 2,8% et celle de DV secs 3,4%.
Et au stade de la donne, en supposant que les cartes possibles en Est sont 10 cartes quelconques parmi 17 non piques et la dame de pique, on trouve que tirer en tête est d'assez peu supérieur à l'impasse : 55,5%.
Mais cela ne satisfait pas le bridgeur qui préfère se voir confronté à cette situation dans de nombreuses donnes et il se dit qu'il trouvera plus d'honneurs secs (5,6%) de de DV secs (3,4%). Il trouvera aussi plus souvent les piques 2-3 que 1-4 mais cela ne le concerne pas. Alors il a besoin d'une caution mathématique pour étayer sa conviction et il sort des cartons sa fidèle loi de Bayes. Il suffit d'affirmer avec conviction qu'avec DV l'adversaire ne fournira le V qu'une donne sur deux et en divisant par 2 la probabilité de DV on trouve qu'il vaut mieux faire l'impasse. C'est le moindre choix.
Personnellement je vous conseille plutôt de vous baser autant que possible sur votre connaissance des mains adverses, de faire l'impasse si Est a de bonnes chances d'être court dans la couleur et de tirer en tête si vous n'avez aucune raison de penser que c'est le cas. Même si les probabilités ne vous donnent qu'un faible avantage.

La loi de connexion

Revenons sur le problème de la chicane à pique.
Je joue 4♠ en Ouest, Nord entame cœur, je prends, j'extrais les atouts adverses en 3 tours, ils sont 3 en sud, 0 en Nord. Sur les 3 tours d'atout Nord fournit 3 petits carreaux. La situation est la suivante :

Nord	**♥2**	**♦2**	**♦3**	**♦4**									
Sud	**♥3**	**♠2**	**♠3**	**♠4**									

Quelle est la probabilité de la ♣D en Nord ?

Roudinesco l'évalue à $\frac{13}{23}$ ce qui revient à se situer dans l'ensemble initial des mains où Nord a une chicane pique, c'est-à-dire au stade où il y a 10 cartes inconnues dans une main et 13 dans l'autre ce qui au cours d'une partie de bridge ne se produit jamais. Dans notre donne les cartes inconnues de Sud sont 9 de la 2^{e} levée à la 4^{e} mais en Nord elles passent de 11 à la 2^{e} levée à 9 à la 4^{e} levée.
Donc, s'il est vrai que tout de suite après la 2^{e} levée la ♣D était plus probable en Nord, ce n'est plus le cas après la 4^{e}.

Cela dit, Roudinesco, dans "La majeure par cinq" et dans "Intelligence du bridge" nous donne des tableaux permettant de retrouver les probabilités de partage d'une couleur lorsqu'on connait, par exemple 4 cartes dans chaque main. Il donne des valeurs approchées mais c'est un jeu d'enfant de retrouver les valeurs exactes.
C'est ce que l'auteur appelle les "probabilités résiduelles" ou probabilités en cours de jeu.
Roudinesco ne s'en doute pas mais on peut utiliser son propre tableau sur les probabilités de partage résiduelles pour démontrer que sa probabilité de situation de la ♣D est fausse.
Comment ?

On va supposer qu'il reste 5 trèfles aux flancs, la couleur n'ayant pas été touchée.
Le résultat que nous voulons démontrer est indépendant du nombre de trèfles du flanc.
On note "x/y" un partage attribuant x trèfles à Nord et y trèfles à Sud.
P(x/y) est la probabilité de ce partage des trèfles dans notre donne tel que nous le trouvons dans le tableau de Roudi.
Tout le monde sait que dans le partage x/y, la probabilité de la ♣D en Nord est $\frac{x}{x+y}$ ici $\frac{x}{5}$.
La probabilité pour que les ♣ soient partagés x/y ET pour que la ♣D soit en Nord sera $P(x/y).\frac{x}{5}$
Enfin si on appelle P(♣D en N) la probabilité pour que la ♣D soit en nord indépendamment du partage des ♣ on a
P(♣D en N) = $P(0/5).\frac{0}{5} + P(1/4).\frac{1}{5} + P(2/3).\frac{2}{5} + P(3/2).\frac{3}{5} + P(4/1).\frac{4}{5} + P(5/0).\frac{5}{5}$
C'est ce que j'appelle la **loi de connexion** qui permet de calculer une probabilité de situation d'une carte en fonction des probabilités de partage de sa couleur.
C'est un résultat banal découlant d'une loi qu'on retrouve dans tous les livres abordant le thème des probabilités composées.
Les probabilités de partage sont les suivantes:

	P(0/5)	P(1/4)	P(2/3)	P(3/2)	P(4/1)	P(5/0)
Roudinesco	1,45%	13,25%	35,3%	35,3%	13,25%	1,45%
Calcul exact	$\frac{1}{68}$	$\frac{9}{68}$	$\frac{24}{68}$	$\frac{24}{68}$	$\frac{9}{68}$	$\frac{1}{68}$

Ce qui fait que la loi de connexion donne pour P(♣D en N) la valeur $\frac{170}{340} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ et non $\frac{13}{23}$ ou $\frac{12}{21}$.
Dans notre donne, la probabilité des trèfles x/y c'est aussi la probabilité des non-trèfles 9-x/9-y. Ce qui fait que la loi de connexion permet aussi de calculer la probabilité de localisation d'un non-trèfles.
Dans la mesure où les partages de trèfles (de 0/5 à 5/0) et des non-trèfles (de 9/4 à 4/9) sont compatibles avec notre donne on peut utiliser la loi de connexion (les probabilités de partages) pour vérifier une probabilité de situation.

La loi de compression

Pour gagner ce contrat j'ai le choix entre l'impasse à la dame de cœur ou les trèfles 3-3. Le choix est vite fait : je ne connais aucune dissymétrie dans les mains adverses donc probabilité de gain de l'impasse 50% et probabilité des trèfles 3-3 : 36%.
Ce qu'on oublie de dire c'est que les probabilités de partage d'une couleur évoluent avec l'avancement de la donne.
La meilleure preuve est que si on n'a pas joué trèfle et qu'on n'en a défaussé aucun à 3 cartes de la fin, la probabilité du partage 3-3 sera 100% et celle des partages 4-2, 5-1, 6-0 sera 0%.
La loi de compression nous indique qu'au cours de la donne, tout se passe comme si on ramassait les trèfles adverses initialement dispersés entre les deux mains pour en faire une répartition de plus en plus équitable.
Autrement dit **la répartition équitable va devenir de plus en plus fréquente au fur et à mesure que la donne progresse tandis que pour les autres répartitions ça va être le contraire.**
Voici l'exemple de l'évolution de la répartition de nos 6 trèfles au cours de la donne.

Levée	0	3	6	9
♣ 3-3	36 %	37,15 %	41 %	57,15%
♣ 4-2 ou +	64%	62,85%	59%	42,85%

Mais pour relativiser l'influence de ce processus, il faut savoir que c'est seulement à la 9^{e} levée que la compression s'accélère et que la probabilité du partage 3-3 devient supérieure à celle de l'impasse.

Les maniements de couleurs

Sur les maniements de couleurs aussi il y a des choses à dire…
Pour évaluer les chances d'un maniement de couleur, le bridgeur le compare à toutes les distributions de cartes possibles dans cette couleur, pondérées par leur probabilité initiale.
Par exemple je manie en Nord ♠ AD109876 pour en Sud ♠32.
Supposons que je compare 2 stratégies
S1 : je joue petit vers l'as et je le mets sauf si Ouest met le V (je couvre de la D) puis au second tour je couvre à minima la carte d'Ouest.
S2 : je joue petit vers le 10, je couvre à minima la carte d'Ouest. si le 10 est pris du V au second tour je tire l'AS, sinon je poursuis par une impasse si nécessaire
Les combinaisons de pique qui font la différence sont

En Ouest	En Est	Probabilité	Levées S1	Levées S2
23V	**R**	**6,2%**	**7**	**6**
23R	**V**	**6,2%**	**6**	**5**
2VR	**3**	**6,2%**	**6**	**7**
3VR	**2**	**6,2%**	**6**	**7**
23VR	**--**	**4,8%**	**5**	**6**

Donc en supposant qu'on soit en TPP il faut faire le plus de levées possibles.
On va dire que
S2 est meilleur dans 17,2% des cas
S1 est meilleur dans 12,4% des cas

Mais puisque les maniements sont articulés différemment selon la première carte fournie par Ouest, pourquoi ne pas les juger à partir du moment où Ouest a fourni sa première carte.
N'est – il pas idiot de juger que S2 va être meilleur dans les cas où Ouest aura 2VR et 3VR alors que ces deux combinaisons s'excluent mutuellement lors de la fourniture de la première carte d'Ouest ?
Si on compare les probabilités respectives après que le 2 soit fourni, voilà ce que ça donne :

23V	**R**	**12,4%**	**7**	**6**
23R	**V**	**12,4%**	**6**	**5**
2VR	**3**	**12,4%**	**6**	**7**
23VR	**--**	**9,6%**	**5**	**6**

Cette fois c'est S1 qui produit le plus de levées avec une fréquence de 24,8% contre 22% à S2. C'est donc S1 qu'il faut choisir à ce moment-là.

Selon vous, vaut – il mieux évaluer la rentabilité d'un maniement au moment où les stratégies concurrentes divergent où quand on l'oppose à toutes les combinaisons possibles au début une donne ?

Espérance mathématique.

Pour juger un maniement de couleur, on ne juge pas son espérance mathématique en levées. On juge par exemple la probabilité qu'il produise 6 levées en match par 4 ou la probabilité pour qu'il fasse plus de levées qu'un autre maniement en TPP.
Ce calcul a un sens parce qu'il repose sur les probabilités dans la donne qu'on est en train de jouer et pas de la probabilité dans un ensemble de donnes.
Par contre, il existe une estimation de la probabilité de gain à partir de laquelle on doit jouer une manche en match par 4. Elle est basée sur un calcul qui dit, par exemple qu'on doit jouer une manche de 4♠ vulnérable avec une probabilité de gain p telle que

$$-6(1-p)+12p = 0,$$

6 étant le nombre de points qu'on perd quand l'adversaire gagne 3♠ tandis que nous on chute 4♠ de 1 et 12 étant le nombre de points qu'on gagne quand on demande la manche et qu'on la gagne tandis que l'adversaire joue 3♠+1.
Ici le calcul donne **$p = \frac{1}{3}$ soit 33%.**
Aussi, il arrive qu'à la mi-temps d'un match par 4 on voit des joueurs malheureux se pointer avec un déficit de 36 points sur leur feuille parce qu'ils ont joué 6 manches à 34% et que toutes chutaient.
Pas de chance dirons-nous ?
Il faut voir.
Quand vous jouez une fois à la roulette, calculer votre espérance mathématique est possible mais cela a une faible portée pratique. Cela peut vous servir, par exemple, à déterminer si le jeu est équitable. Par contre, si vous jouez de la même façon à la roulette des centaines de fois, l'espérance mathématique caractérise votre gain moyen ou votre perte moyenne sur ces centaines de coups. C'est donc dans ce contexte qu'elle prend tout son sens.
En matière de bridge, ce 33% que vous calculez caractérise bien le seuil au-delà duquel la probabilité de gain de votre manche doit se situer pour prétendre à une espérance mathématique nulle, mais pratiquement, afficher un bilan nul (ni gain, ni perte) suppose que vous jouiez la même manche de nombreuses fois et que les mains adverses vous sont favorables en moyenne une fois sur trois.
Est – ce ainsi qu'on procède en matière de bridge ?
Avouez qu'expliquer aux partenaires que si vous aviez joué la même manche des centaines de fois vous auriez pu espérer équilibrer votre bilan en IMP dénote une vision un tantinet optimiste des probabilités dès lors qu'au bridge on a beaucoup de mal à jouer une manche une seule fois. Alors cent fois …
Tout ce que vous demandent vos partenaires, c'est d'appeler les manches qui gagnent et d'éviter celles qui chutent.
De ce point de vue, est ce que demander une manche dont la probabilité de gain est 33% va vous permettre de répondre à leurs attentes ? La réponse est une fois sur trois seulement.

Et si au cours d'un match vous ne gagnez qu'une manche sur trois je pense que vous n'êtes pas favori pour le gagner.
Alors vous pouvez bien sûr vous situer dans la perspective de plusieurs matchs et vous dire qu'à la longue ça finira bien par payer.
Seulement voilà, une fois que le match est plié on passe à un autre et prises une à une les donnes, ne gardent pas la mémoire de vos échecs passés. Les matchs non plus d'ailleurs.
Alors, l'espérance mathématique …
Laissez là donc aux joueurs de roulette et aux casinomaniaques.

En somme, en matière de bridge, pour calculer la probabilité en cours de donne, il faut absolument éviter de recourir à une vision en fréquence qui vous expose à de nombreuses tentations trompeuses. Tournez-vous vers les cartes que les joueurs ont encore en main à l'instant T, faites le bilan de ce que vous savez d'elles, faites le décompte des mains possibles et parmi elles de celles qui sont favorables à votre hypothèse, puis évaluez la probabilité de votre hypothèse comme le rapport des deux nombres.

Par contre en ce qui concerne l'espérance mathématique, c'est vous qui voyez.
Vous pouvez toujours envisager d'atteindre un bilan nul en IMPs sur le long terme.
Mais à tout prendre, je préfèrerais que ce soit quand vous jouez contre moi.